

Fachhochschule

University of Applied Sciences

Oldenburg  
Ostfriesland

Wilhelmshaven



Wissenschaftliche Einrichtung (WE)



Labor Grundlagen der Elektrotechnik

Pflichtvorlesung

# Grundlagen der Elektrotechnik I

(EG I)

für Studierende  
des  
1. Semesters

Standort Wilhelmshaven  
Fachbereich Ingenieurwissenschaften  
Bereich Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Ahlers



## Literaturhinweise:

Auf dem Gebiet "Grundlagen der Elektrotechnik" gibt es eine Menge brauchbarer Lehrbücher, hier sei nur eines erwähnt:

- /1/ Moeller; Fricke; Frohne; Vaske:  
Grundlagen der Elektrotechnik;  
Teubner Verlag, Stuttgart 1986.

## Übersicht: Grundlagen der Elektrotechnik I bis III

- 1. Semester (6 Stunden)
  - 1. Einführung
  - 2. Der einfache Gleichstromkreis
  - 3. Berechnung linearer Gleichstromnetze
  - 4. Energie und Leistung bei Gleichstrom
  - 5. Sonderabschnitte
  - 6. Wechselstrom, Einführung
  
- 2. Semester (6 Stunden)
  - 6. Wechselstrom, Fortsetzung
  - 7. Elektrisches Strömungsfeld
  - 8. Elektrostatisches Feld
  
- 3. Semester (4 Stunden)
  - 9. Magnetisches Feld
  - 10. Schaltvorgänge

# Gliederung: Grundlagen der Elektrotechnik I

## 1. Einführung

- 1.1. Schreibweise physikalischer und technischer Gleichungen
- 1.2. Numerisches Rechnen, Rechnen mit Näherungswerten
- 1.3. Das Internationale Maßsystem: SI-System
- 1.4. Schreibweise und Konventionen
- 1.5. Ein paar Daten zur Geschichte der Elektrotechnik

## 2. Der einfache Gleichstromkreis

- 2.1. Definitionen und Grundbegriffe
- 2.2. Ohmsches Gesetz
- 2.3. Kirchhoffsche Regeln
- 2.4. Ersatzwiderstände
- 2.5. Strom- und Spannungsteiler
- 2.6. Strom- Spannungs- und Widerstandsmessungen
- 2.7. Ersatzquellen

## 3. Berechnung linearer Gleichstrom-Netze

- 3.1. Einleitung
- 3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze
- 3.3. Maschenstrom-Verfahren
- 3.4. Netz-Umwandlung
  - 3.4.1. Ersatzwiderstand
  - 3.4.2. Quellenumwandlung
  - 3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung
  - 3.4.4. Verlegung idealer Stromquellen
  - 3.4.5. Umwandlung idealer Quellen
- 3.5. Überlagerungssatz
- 3.6. Ersatzquelle
- 3.7. Knotenpunkt-Potential-Verfahren
- 3.8. Tricks bei Netzwerksberechnungen
  - 3.8.1. Symmetrie-Überlegungen
  - 3.8.2. Netzwerkentkopplung durch ideale Spannungsquellen
  - 3.8.3. Netzwerkentkopplung durch ideale Stromquellen

## 4. Energie und Leistung

- 4.1. Spannung, Potential, Feldstärke, Kraft
- 4.2. Bestimmungsgleichung der elektrischen Energie
- 4.3. Energiearten
- 4.4. Energiewandler
- 4.5. Elektrische Leistung
- 4.6. Elektrisches Erwärmen
- 4.7. Mechanische Leistung und Energie
- 4.8. Energieübertragung über Gleichstromleitungen

## 5. Sonderabschnitte

- 5.1. Leiter, Halbleiter, Isolatoren
- 5.2. Nichtlineare Gleichstromkreise
- 5.3. Thermoelektrische Erscheinungen
- 5.4. Elektrochemische Vorgänge

# Inhaltsverzeichnis: Grundlagen der Elektrotechnik I

1. Einführung	1
1.1. Schreibweise physikalischer und technischer Gleichungen	1
1.2. Numerisches Rechnen, Rechnen mit Näherungswerten	1
1.3. Das Internationale Maßsystem: SI-System	2
1.3.1. Die SI-Grundeinheiten	2
1.3.2. Vielfache der Grundeinheiten	3
1.3.3. Abgeleitete Einheiten	3
1.3.4. Das Rechnen mit Einheiten	9
1.4. Schreibweise und Konventionen	11
1.5. Ein paar Daten zur Geschichte der Elektrotechnik	12
1.6. Aufgaben und Fragen	13
2. Der einfache Gleichstromkreis	17
2.1. Definitionen und Grundbegriffe	17
2.1.1. Atommodelle und Molekülmodelle	17
2.1.2. Was ist Strom	18
2.1.3. Was ist Spannung	19
2.1.4. Stromleitung im Elektrolyten	20
2.1.5. Stromleitung in Metallen	21
2.1.6. Ladung	21
2.1.7. Zusammenhang Ladung und Strom	22
2.1.8. Stromdichte	22
2.1.9. Ladungsträger-Geschwindigkeit in einem Leiter	22
2.1.10. Minimal-Stromkreis	24
2.1.11. Wirkung des elektrischen Stromes	24
2.1.12. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.1	25
2.2. Ohmsches Gesetz	30
2.2.1. Formabhängigkeit des Widerstandes	31
2.2.2. Temperaturabhängigkeit von Widerständen	33
2.2.3. Material-Werte	34
2.2.4. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.2	35
2.3. Kirchhoffsche Regeln	38
2.3.1. Erstes Kirchhoffsche Gesetz	38
2.3.2. Zweites Kirchhoffsche Gesetz	39
2.3.3. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.3	40
2.4. Ersatzwiderstände	43
2.4.1. Ersatzreihenwiderstand	43
2.4.2. Ersatzparallelwiderstand	44
2.4.3. Berechnung von Netzen mit einer Spannungsquelle mit Hilfe des Ersatzwiderstandes	45
2.4.4. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 2.4	48
2.5. Strom- und Spannungsteiler	49
2.5.1. Spannungsteiler	49
2.5.2. Stromteiler	51
2.5.3. Potentiometer als Spannungsteiler	52
2.5.3.1. Unbelastetes Potentiometer	52
2.5.3.2. Belastetes Potentiometer	53
2.5.4. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.5	54
2.6. Strom- Spannungs- und Widerstandsmessungen	56
2.6.1. Strom-Messung	56
2.6.1.1. Prinzip und ESB	56
2.6.1.2. Messbereichserweiterung	57
2.6.2. Spannungsmessung	58
2.6.2.1. Prinzip und ESB	58
2.6.2.2. Messbereichserweiterung	59
2.6.3. Widerstandsmessung	60
2.6.3.1. Ohmsches Gesetz	60
2.6.3.2. Direkt anzeigende Widerstandsmessgeräte	60
2.6.3.3. Widerstands-Messbrücke	61

2.6.3.3.1. Prinzip	61
2.6.3.3.2. Messung mit dekadischen Normal-Widerständen	64
2.6.3.3.3. Messung mit Potentiometer	64
2.6.4. Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.6	65
2.7. Ersatzquellen	66
2.7.1. Ersatz-Spannungsquelle	66
2.7.1.1. Ersatzschaltbild	66
2.7.1.2. Kennlinie der Quelle	67
2.7.1.3. Grafische U-Bestimmung	68
2.7.2. Ersatz-Stromquelle	70
2.7.2.1. Ersatzschaltbild	70
2.7.2.2. Kennlinie	70
2.7.2.3. Belastete Stromquelle	71
2.7.3. Umrechnung zwischen Ersatz- Strom- und Spannungsquelle	71
2.7.4. Geregelttes Netzteil	72
2.7.5. Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.7	73
3. Berechnung linearer Gleichstrom-Netze	75
3.1. Einleitung	75
3.1.1. Allgemeines	75
3.1.2. Begriffe	75
3.1.3. Normierung	76
3.1.4. Beispielnetze	77
3.1.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.1	82
3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze	83
3.2.1. Methode	83
3.2.2. Berechnung des Beispiel-Netzwerkes	85
3.2.3. Zusammenfassung	89
3.2.4. Beispiele zu Knoten und Maschenanalyse	90
3.2.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.2	91
3.3. Maschenstrom-Verfahren	94
3.3.1. Einführung von Maschenströmen	94
3.3.2. Schema zum Maschenstrom-Verfahren	97
3.3.3. Beispiele zum Maschenstromverfahren	98
3.3.4. Maschenstrom-Verfahren für Rechner	100
3.3.4.1. Allgemeine Herleitung	100
3.3.4.2. Herleitung am Beispiel	104
3.3.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.3	109
3.4. Netz-Umwandlung	111
3.4.1. Ersatzwiderstand	111
3.4.2. Quellenumwandlung	112
3.4.2.1. Umwandlung Strom- und Spannungsquellen	112
3.4.2.2. Reihenschaltung idealer Spannungsquellen	112
3.4.2.3. Parallelschaltung idealer Stromquellen	112
3.4.2.4. Beispiele zur Umwandlung Strom- und Spannungsquellen	113
3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung	115
3.4.3.1. Vorbetrachtung	115
3.4.3.2. Dreieck-Stern-Umwandlung	116
3.4.3.3. Stern-Dreieck-Umwandlung	119
3.4.4. Verlegung idealer Strom-Quellen	121
3.4.5. Umwandlung idealer Quellen	122
3.4.5.1. Umwandlung idealer Spannungsquellen	122
3.4.5.2. Umwandlung idealer Stromquellen	122
3.4.6. Aufgaben zu Abschnitt 3.4	124
3.5. Überlagerungssatz	126
3.5.1. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.5	128
3.6. Ersatzquelle	129
3.6.1. Mathematische Theorie	129
3.6.2. Physikalische Theorie	131
3.6.3. Schema zu Ersatz-Spannungsquelle	132
3.6.4. Beispiele und Aufgaben	132
3.7. Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren	135

3.7.1. Einführung von Knotenpunkt-Potenzialen	135
3.7.2. Ableitung des Knotenpunkt- Potenzial-Verfahrens am Beispiel	136
3.7.3. Schema zum manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren	137
3.7.4. Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren für Rechner	140
3.7.4.1. Mathematische Herleitung	140
3.7.4.2. Physikalische Herleitung am Beispiel	142
3.7.4.3. Auswertung der Formeln	144
3.7.5. Schema zum Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren für Rechner	145
3.7.6. Fragen und Aufgaben	147
3.8. Tricks bei Netzwerksberechnungen	150
3.8.1. Symmetrie-Überlegungen	150
3.8.2. Netzwerkentkopplung durch ideale Spannungsquellen	151
3.8.3. Netzwerkentkopplung durch ideale Stromquellen	154
3.8.4. Aufgaben zu Abschnitt 3.8	156
3.9. Zusammenfassung der Verfahren für lineare Netzwerke	159
4. Energie und Leistung	160
4.1. Spannung, Potenzial, Feldstärke, Kraft	160
4.1.1. Spannung in SI-Einheiten	160
4.1.2. Potenzial und Feldstärke	161
4.1.3. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.1	162
4.2. Bestimmungsgleichung der elektrischen Energie	164
4.3. Energiearten	165
4.3.1. Energie und Arbeit	165
4.3.2. Potentielle mechanische Energie	165
4.3.3. Kinetische Energie	165
4.3.4. Druckenergie	166
4.3.4.1. Druckenergie eines geschlossenen Systems	166
4.3.4.2. Arbeit im Druckfeld bei Volumenstrom	166
4.3.5. Thermische Energie	166
4.3.6. Schmelzwärme und Verdampfungsenergie	167
4.3.7. Mechanische Reibungsverluste	167
4.3.8. Magnetische Energie	167
4.3.9. Energie des elektrischen Feldes	168
4.3.10. Elektromagnetische Energie	168
4.3.11. Bindungsenergie	168
4.3.11.1. Chemische Energie	169
4.3.11.2. Kernenergie	169
4.3.12. Fragen zu Abschnitt 4.3	170
4.4. Energiewandler	171
4.4.1. Wandlung in elektrische Energie	171
4.4.1.1. Generatoren	171
4.4.1.2. Akkumulator, Batterie	171
4.4.1.3. Thermoelemente	171
4.4.1.4. Fotoelement, Fotozelle, Solarzelle	171
4.4.2. Wandlung der elektrischen Energie	171
4.4.2.1. Motore	171
4.4.2.2. Elektrowärme	171
4.4.2.3. Elektrochemie	172
4.4.2.4. Beleuchtung	172
4.4.3. Turbine	172
4.4.4. Kraftwerke	172
4.4.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.4	173
4.5. Elektrische Leistung	174
4.5.1. Leistung an einem ohmschen Widerstand	174
4.5.2. Leistungsbilanz und Wirkungsgrad	175
4.5.3. Leistungsanpassung	175
4.5.4. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.5	181
4.6. Elektrisches Erwärmen	183
4.6.1. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 4.6	184

4.7. Mechanische Leistung und Energie	186
4.7.1. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 4.7	186
4.8. Energieübertragung über Gleichstromleitungen	187
4.8.1. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.8	188
5. Sonderabschnitte	190
5.1. Leiter, Halbleiter, Isolatoren	190
5.1.1. Bereiche des spezifischen Widerstandes	190
5.1.2. Bändermodell	191
5.1.3. Die elektrische Leitfähigkeit	192
5.1.4. Halbleitung	193
5.1.4.1. Eigenleitung	193
5.1.4.2. Störstellenleitung	196
5.1.5. Der p-n-Übergang	198
5.1.6. Opto-Elektronik	205
5.1.7. Maximale Verlustleistung (Verlustleistungshyperbel)	206
5.1.8. VDR-Widerstände	206
5.1.9. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 5.1	207
5.2. Nichtlineare Gleichstromkreise	211
5.2.1. Grafische Methode	211
5.2.2. Grafische Reihenschaltung	213
5.2.3. Grafische Parallelschaltung	214
5.2.4. Polynom-Annäherung	215
5.2.5. Linearisierung im Arbeitspunkt	216
5.2.6. Lineare Ersatzschaltung	218
5.2.7. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 5.2	220
5.3. Thermoelektrische Erscheinungen	237
5.3.1. Temperaturabhängigkeit des Widerstandes	237
5.3.1.1. Metalle und Halbleiter	237
5.3.1.2. NTC und PTC Widerstände	240
5.3.1.3. Temperaturkompensation	241
5.3.2. Übergang zwischen zwei Materialien	245
5.3.2.1. Seebeck-Effekt, Thermoelement	245
5.3.2.2. Peltier-Effekt	247
5.4. Elektrochemische Vorgänge	250
5.4.1. Elektrolyt	250
5.4.2. Elektrolyse und Stromleitung	251
5.4.3. Elektrochemische Spannungserzeugung	253
5.4.3.1. Galvanische Elemente	257
5.4.3.2. Akkumulator	258
5.4.4. Frage und Aufgaben zu Abschnitt 5.4	260



1. Einführung .....	1
1.1. Schreibweise physikalischer und technischer Gleichungen .....	1
1.2. Numerisches Rechnen, Rechnen mit Näherungswerten .....	1
1.3. Das Internationale Maßsystem: SI-System .....	2
1.3.1 Die SI-Grundeinheiten .....	2
1.3.2. Vielfache der Grundeinheiten .....	3
1.3.3. Abgeleitete Einheiten .....	3
1.3.4. Das Rechnen mit Einheiten .....	9
1.4. Schreibweise und Konventionen .....	11
1.5. Ein paar Daten zur Geschichte der Elektrotechnik .....	12
1.6. Aufgaben und Fragen .....	13

# 1. Einführung

## 1.1. Schreibweise physikalischer und technischer Gleichungen

Physikalische Größe = Zahlenwert \* Einheit

**Beispiel:**  $15.55 \text{ cm} = 15.55 * 1 \text{ cm}$

In der praktischen Anwendung gibt es drei Arten von Gleichungen:

**Größengleichung:**  $U = R * I$   
 $F = m * a$

**Einheitengleichung:**  $N = \text{kg m/s}^2$

**zugeschnittene Größengleichung:**  $\frac{U}{kV} = \frac{I}{kA} * \frac{R}{\Omega}$

### Beispiele:

**Größengleichung:**  $F = 10 \text{ kg} * 5 \text{ m/s}^2 = 50 \text{ kg ms}^{-2}$   
 $U = 5 \Omega * 7 \text{ A} = 35 \text{ V}$

**Einheitengleichung:**  $1 \text{ V} = 1 \text{ A} * 1 \Omega$   
 $1 \text{ W} = 1 \text{ V} * 1 \text{ A}$   
 $1 \text{ N} = 1 \text{ kgms}^{-2}$

## 1.2. Numerisches Rechnen, Rechnen mit Näherungswerten

Die Aussage

$$\sqrt{3} = 1.732$$

ist mathematisch falsch, praktisch aber meist richtig.

### Vereinbarung:

In der Vorlesung **Grundlagen der Elektrotechnik** soll i. a. mit **drei** Stellen Genauigkeit gerechnet werden, dazu müssen i. a. Zwischenwerte mit **vier** Stellen Genauigkeit berechnet werden. Drei Stellen Genauigkeit bedeuten drei signifikante Stellen (nicht Stellen hinter dem Komma).

### Beispiele für Stellengenauigkeit:

123	3 signifikante Stellen	123.45	5 signifikante Stellen
12.3	3 signifikante Stellen	1234.56	6 signifikante Stellen
1.23	3 signifikante Stellen	12.34567	7 signifikante Stellen
0.123	3 signifikante Stellen	12.345	5 signifikante Stellen

### Stellengenauigkeit für die Praxis

In der Praxis ist die Anzahl der signifikanten Stellen von der Fehlertoleranz des berechneten oder gemessenen Wertes abhängig.

### Beispiele für die Auswahl der Anzahl signifikanter Stellen:

Messwert	Genauigkeit	Angabe	Begründung
$U = 12.345 \text{ V}$	10 %	$U = 12 \text{ V}$	10 % $\triangleq$ 1 V, dieses ist die letzte Stelle
$U = 12.345 \text{ V}$	1 %	$U = 12.3 \text{ V}$	1 % $\triangleq$ 0.1 V, dieses ist die letzte Stelle
$U = 12.345 \text{ V}$	0.1 %	$U = 12.34 \text{ V}$	0.1 % $\triangleq$ 0.01 V, dieses ist die letzte Stelle

## 1.3. Das Internationale Maßsystem: SI-System

Was ist Messen?

Antwort: Vergleichen

Um zu vergleichen, werden Vergleichsmaße benötigt. Das internationale Maßsystem, das SI-System (System-International), hat sieben Grundeinheiten festgelegt (siehe Kap. 1.3.1). Alle anderen physikalischen Größen lassen sich aus den sieben Grundeinheiten ableiten, siehe Kap. 1.3.3. Um handliche Zahlen zu bekommen sind sehr oft dekadische Vielfache der Basiseinheiten zu verwenden, siehe Kap. 1.3.2.

### 1.3.1 Die SI-Grundeinheiten

#### Länge:

Historie : Elle (Armlänge)  
Fuß (Name sagt es)  
Zoll (1150 legte der König von Schottland fest: mittlere Daumendicke von 3 Männern)  
Obere Größen (und auch noch viele nicht erwähnte Größen) sind alles vage individuelle Größen.

1799 Meter : 40 000 000 Teil des ungenau gemessenen Erdumfangs (auch noch vage)

Heute : 1 m ist die 1 650 763.73 fache Länge der Wellenlänge des isolierten Atoms des Isotops Krypton 86 vom Übergang vom Zustand  $5d_5$  zum Zustand  $2p_{10}$

#### Zeit:

Früher: Auch die Dauer einer Erdumdrehung ist eine vage Größe. Zur Zeit der Dinosaurier betrug die Dauer einer Erdumdrehung etwa 22.5 Stunden.

Heute: 1 s repräsentiert 9 192 931 770 Schwingungen des Atoms Cäsium  $^{133}\text{C}$

**Masse:** 1 kg als Archivkilogramm

#### Stromstärke:

Früher: Die Stromstärke 1 A wurde früher über die ausgeschiedene Menge Metall in einem elektrolytischen Bad definiert.

Heute: Die Definition eines 1 A erfolgt später in Kap. 9 (magnetisches Feld, 3. Semester) mit Hilfe der Kräfte, die auf einen stromdurchflossenen Leiter wirken.

**Temperatur:** 1 K

**Lichtstärke:** 1 cd

**Stoffmenge:** 1 mol

### 1.3.2. Vielfache der Grundeinheiten

**Beispiele:**  $1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}$   
 $1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}$

			üblich in der E-Technik
Exa	E	$10^{18}$	nein
Peta	P	$10^{15}$	nein
Tera	T	$10^{12}$	nein
Giga	G	$10^9$	ja
Mega	M	$10^6$	ja
Kilo	k	$10^3$	ja
Hekto	h	$10^2$	nein
Deka	da	$10^1$	nein
Dezi	d	$10^{-1}$	nein
Zenti	c	$10^{-2}$	(manchmal)
Milli	m	$10^{-3}$	ja
Mikro	$\mu$	$10^{-6}$	ja
Nano	n	$10^{-9}$	ja
Pico	p	$10^{-12}$	ja
Femto	f	$10^{-15}$	nein
Atto	a	$10^{-18}$	nein

Tabelle 1.1: Dekadische Vielfache

### 1.3.3. Abgeleitete Einheiten

Die in Abschnitt 1.3.1 vorgestellten SI-Basiseinheiten reichen aus, um alle anderen physikalischen Einheiten anzugeben. Dieses soll am Beispiel der Kraft exemplarisch aufgezeigt werden. Aus der physikalischen Gleichung

$$F = m \cdot a$$

wird die Einheitengleichung gebildet:

$$[F] = [m] \cdot [a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{kgms}^{-2}$$

Somit ist die Einheit der Kraft auf SI-Basiseinheiten zurückgeführt. Damit nun nicht immer wegen des Aufwandes für die Kraft die Einheit  $\text{kgms}^{-2}$  angegeben werden muß, erfolgt die Definition der abgeleiteten Einheit:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kgms}^{-2} \quad (\text{Newton})$$

Somit kann als Einheit der Kraft angegeben werden:

$$[F] = 1 \text{ N} = 1 \text{ kgms}^{-2}$$

In der Elektrotechnik wird überwiegend mit den Einheiten m (Meter), s (Sekunde), A (Ampere) und V (Volt) gerechnet. Anstatt der SI-Basis-Einheit kg (Kilogramm) wird üblicherweise die abgeleitete Einheit Volt verwendet. Die Ableitung der Einheit Volt wird im Kapitel 4 ausführlich beschrieben. Hier nur die Kurzfassung: Aus dem Gleichsetzen der Einheiten für die elektrische und mechanische Leistung

$$1 \text{ VA} = 1 \text{ W} = 1 \text{ Nms}^{-1} = 1 \text{ kgm}^2\text{s}^{-3}$$

folgt:

$$1 \text{ kg} = 1 \text{ VAm}^{-2}\text{s}^3 \quad 1 \text{ V} = 1 \text{ kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}$$

Die im Laufe der EG-Vorlesungen (EGI-EGIII) abgeleiteten Einheiten (und einige zusätzliche) sind in den

Tabellen 1.2 und 1.3 eingearbeitet.

In Tabelle 1.2 sind angegeben für die meisten verwendeten Formelzeichen

- Formelbuchstabe (alphabetisch geordnet)
- Beschreibung der physikalischen Größe
- SI-Einheit in m, s, kg, A, K, cd und mol
- die abgeleitete SI-Einheit
- die Einheit in m, s, V, A und K
- das erste Auftreten oder Ableitung der Einheit im Rahmen der EG-Vorlesungen

In Tabelle 1.3 sind die Einheiten alphabetisch, geordnet, angegeben sind:

- Einheit, alphabetisch geordnet
- physikalischen Größe
- Name und Beschreibung der Einheit
- Art der Einheit (s.u.)
- die Umrechnung auf bekannte Einheiten

Bei der Art der Einheit ist zu unterscheiden:

- Sieben **SI-Basis-Einheiten** sind in Abschnitt 1.3.1 beschrieben.
- Aus den sieben SI-Basis-Einheiten abgeleitete Einheiten (z.B. oder V) sind mit "**SI-abgl.**" bezeichnet.
- Aus SI-Einheiten zusammengesetzte Einheiten sind mit "**SI-Zusatz**" gekennzeichnet (z.B. Nm, VA).
- Winkel, Raumwinkel und Umdrehungen haben die Einheit "1" zum besseren Verständnis wird manchmal z.B. rad mit angegeben, diese sind mit "**SI-sond.**" gekennzeichnet.
- Die mit "**Zusatz**" angegebene Einheiten sind zwar keine SI-Einheiten, werden jedoch noch in speziellen Bereichen benutzt oder sind leichter zu überschauen. Unter  $31 \cdot 10^6$ s kann man sich weniger vorstellen als unter einem Jahr. Die Umrechnung dieser Einheiten auf SI-Einheit ist jeweils angegeben.
- Die Umrechnungen für im "**Ausland**" noch gebräuchliche Einheiten und für früher benutzte ("**alt**") Einheiten sind in Tabelle 1.3 ebenfalls angegeben.
- Auch die dekadischen Vorsätze sind in Tabelle 1.3 enthalten und mit "**Vielf**" gekennzeichnet.

	physikalische Größe	SI-Einheit	abgeleitete SI-Einheit	m-s-V-A Einheit	ab Kap.
a	Beschleunigung	$\text{ms}^{-2}$			
a	Drehfaktor	1			6.9
A	Querschnitt	$\text{m}^2$			
$A_T$	Atomgewicht	$u = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{kg}$			4.3, 5.4
b	Beweglichkeit	$\text{s}^2 \text{Akg}^{-1}$		$\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$	5.1
b	Luftspalterweiterungsfaktor	1			9.15
B	Suszeptanz, Blindleitwert	$\text{A}^2 \text{s}^3 \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1}$	S	$\text{AV}^{-1}$	6.5
B	Induktion, magn. Flussdichte	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$	$T = \text{Vs/m}^2$	$\text{Vsm}^{-2}$	9.1
$B_v$	Leuchtdichte	$\text{cdm}^{-2}$			
c	elektrochemisches Äquivalent	$\text{kgA}^{-1} \text{s}^{-1}$		$\text{Vs}^2 \text{m}^{-2}$	5.4
c	spezifische Wärme	$\text{m}^2 \text{K}^{-1} \text{s}^{-2}$	$\text{W s kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{m}^2 \text{K}^{-1} \text{s}^{-2}$	4.3
c	Lichtgeschwindigkeit	m/s			4.3
C	Kapazität	$\text{A}^2 \text{s}^4 \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1}$	$\text{As/V} = \text{F}$	$\text{AsV}^{-1}$	6.5, 8.7
d	Klirrfaktor	1			6.4
d, D	Durchmesser	m			
D	Verschiebungsflussdichte	$\text{Asm}^{-2}$	$\text{Cm}^{-2}$	$\text{Asm}^{-2}$	8.5
E	elektrische Feldstärke	$\text{kgms}^{-3} \text{A}^{-1}$	$\text{Vm}^{-1}$	$\text{Vm}^{-1}$	4.1
$E_v$	Beleuchtungsstärke	$\text{cd} \cdot \text{sr/m}^2$	$\text{lm/m}^2 = \text{Lx}$		
F	Frequenz- Übertragungsfunktion	1			6.7
F	Formfaktor	1			6.4
F	Kraft	$\text{kgms}^{-2}$	N	$\text{VAsm}^{-1}$	1.3
g	Erdbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$			4.3
g	differentieller Leitwert	$\text{A}^2 \text{s}^3 \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1}$	S	$\text{AV}^{-1}$	5.2
g	Grundschwingungsgehalt	1			6.4
G	Wirkleitwert, Konduktanz	$\text{A}^2 \text{s}^3 \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1}$	S	$\text{AV}^{-1}$	2.2
h	Eindringtiefe	m			9.10
h	Höhe	m			

	physikalische Größe	SI-Einheit	abgeleitete SI-Einheit	m-s-V-A Einheit	ab Kap.
H	magnetische Feldstärke	$\text{Am}^{-1}$			9.1
I	Strom	A			2.1
$I_v$	Lichtstärke	cd			
J	Stromdichte	$\text{Am}^{-2}$			2.1
k	Anzahl der Knoten	l			3
k	Boltzmann-Konstante	$\text{kgm}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$	$\text{WsK}^{-1}$	$\text{VAsK}^{-1}$	5.1
l	Länge	m			
L	Induktivität	$\text{kgm}^2\text{s}^{-2}\text{A}^{-2}$	$\Omega\text{s} = \text{H}$	$\text{VsA}^{-1}$	6.5,9.10
m	Anzahl der Maschen	l			3
m	Masse	kg		$\text{VAs}^3\text{m}^{-2}$	1.1
$\dot{m}$	Massenstrom	$\text{kg s}^{-1}$		$\text{VAs}^2\text{m}^{-2}$	/
M	Gegeninduktion	$\text{kgm}^2\text{s}^{-2}\text{A}^{-2}$	$\Omega\text{s} = \text{H}$	$\text{VsA}^{-1}$	9.10
n	Elektronendichte	$\text{m}^{-3}$	$\text{cm}^{-3}, \text{mm}^{-3}$		2.1
n	Messbereichserweiterungsfaktor	l			2.6
N	Windungszahl	l			
$N_D$	Entmagnetisierungsfaktor	l			9.7
p	Druck	$\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$	$\text{Nm}^{-2}$	$\text{VAsm}^{-3}$	4.3
p	Laplace-Variable	$\text{s}^{-1}$			6.7,10.1
P, p	Leistung	$\text{kgm}^2\text{s}^{-3}$	$\text{W} = \text{Nm/s} = \text{J/s}$	VA	4.5
q	Elementarladung	As	C		2.1
Q	Blindleistung	$\text{kgm}^2\text{s}^{-3}$	var	VA	6.5
Q	Güte	l			6.7
Q	Ladung	As	C		2.1
r	differentieller Widerstand	$\text{kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$	$\Omega$	$\text{VA}^{-1}$	5.2
r	Verdampfungswärme	$\text{m}^2\text{s}^{-2}$	$\text{Wskg}^{-1}$		4.3
R	(Wirk-)Widerstand, Resistanz	$\text{kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$	$\Omega$	$\text{VA}^{-1}$	2.2
$R_m$	magnetischer Widerstand	$\text{A}^2\text{s}^2\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$	$\text{H}^{-1}$	$\text{AV}^{-1}\text{s}^{-1}$	9.3
s	Schmelzwärme	$\text{m}^2\text{s}^{-2}$	$\text{Wskg}^{-1}$		4.3
s	Weg	m			
S	Scheinleistung	$\text{kgm}^2\text{s}^{-3}$	VA	VA	6.5
t	Zeit	s			
T	Periodendauer	s			6.1
T	Temperatur	K			
T	Zeitkonstante	s			8.13,10.1
ü	Übersetzungsverhältnis	l			9.14
U	Spannung	$\text{kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}$	V	V	
v	Geschwindigkeit	m/s			
$\dot{V}$	Volumenstrom	$\text{m}^3\text{s}^{-1}$			
V	magnetische Spannung	A			9.3
V	Volumen	$\text{m}^3$			
W	Energie, Arbeit	$\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$	$\text{Ws} = \text{Nm} = \text{J}$	VAs	4.2
X	Blindwiderstand, Reaktanz	$\text{kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$	$\Omega$	$\text{VA}^{-1}$	6.5
Y	Scheinleitwert, Admittanz	$\text{A}^2\text{s}^3\text{m}^{-2}\text{kg}^{-1}$	S	$\text{AV}^{-1}$	6.5
z	Anzahl der Zweige	l			3
Z	Scheinwiderstand, Impedanz	$\text{kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$	$\Omega$	$\text{VA}^{-1}$	6.5
$\alpha$	Temperaturbeiwert	1/K	$1/\text{grad} = 1/^\circ\text{C}$		2.2
$\alpha$	Zeigerausschlag beim Messgerät	l = rad			2.6
$\beta$	quadratischer Temperaturbeiwert	$\text{K}^{-2}$	$\text{K}^{-2} = (^\circ\text{C})^{-2}$		2.2
$\Delta\hat{\theta}$	Temperaturdifferenz	K	grad = $^\circ\text{C}$		
$\epsilon$	elektrothermisches Äquivalent	$\text{kgm}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}\text{K}^{-1}$	V/K	$\text{VK}^{-1}$	5.3
$\epsilon$	absolute Dielektrizitätskonstante	$\text{A}^2\text{s}^4\text{kg}^{-1}\text{m}^{-3}$	$\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$	$\text{AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$	8.6
$\epsilon_0$	absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums	$\text{A}^2\text{s}^4\text{kg}^{-1}\text{m}^{-3}$	$\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$	$\text{AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$	8.6
$\epsilon_r$	relative Dielektrizitätskonstante	l			8.6
$\eta$	Wirkungsgrad	l			4.5
$\eta$	dynamische Viskosität	$\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$	$\text{Nsm}^{-2}$	$\text{VAs}^2\text{m}^{-3}$	
$\Theta$	Massenträgheitsmoment	$\text{kgm}^2$		$\text{VAs}^3$	4.3

	physikalische Größe	SI-Einheit	abgeleitete SI-Einheit	m-s-V-A Einheit	ab Kap.
Θ	magnetische Durchflutung	A			9.3
κ	elektrische Leitfähigkeit	$A^2 s^3 kg^{-1} m^{-3}$	Sm/mm <sup>2</sup> ; S/m	$AV^{-1}m^{-1}$	2.2
Λ	magnetischer Leitwert	$kgm^2 A^{-2} s^{-2}$	H	$VsA^{-1}$	9.3
λ	Linienladung	$Asm^{-1}$	Cm <sup>-1</sup>		8.4
μ	Induktionskonstante, Permeabilität	$kgms^{-2}A^{-2}$	TmA <sup>-1</sup>	$VsA^{-1}m^{-1}$	9.1
μ <sub>0</sub>	Induktionskonstante, Permeabilität des Vakuums	$kgms^{-2}A^{-2}$	TmA <sup>-1</sup>	$VsA^{-1}m^{-1}$	9.1
μ <sub>r</sub>	relative Permeabilität	1			9.1
ν	kinematische Viskosität	$m^2s^{-1}$			
τ	Faktor der Flussverknüpfung	1			9.7
Φ	magnetischer Fluss	$kgm^2s^{-2}A^{-1}$	Tm <sup>2</sup>	Vs	9.3
Φ <sub>v</sub>	Lichtstrom	cd*sr	lm		
Ψ	Verschiebungsfluss	As	C	As	8.5
Ω	normierte Frequenz	1			6.7
ω	Winkelgeschwindigkeit	1/s = rad/s			
ω	Kreisfrequenz	rad/s = s <sup>-1</sup>			6.2
θ	Temperatur	°C			2.2
φ	Phasenwinkel	rad = 1			6.2
φ	Potential	$kgm^2s^{-3}A^{-1}$	V	V	3.7, 4.1
ρ	spezifischer Widerstand	$kgm^3s^{-3}A^{-2}$	Ωmm <sup>2</sup> /m; Ωm	$VmA^{-1}$	2.2

Tabelle 1.2: Einheiten der physikalischen Größen, Auswahl

	physikalische Größe	Beschreibung, Name	Art	Umrechnung
a	Zeit	anno (Jahr)	Zusatz	1 a = 31 556 926 s
a	Fläche	Ar	Zusatz	1 Ar = 100 m <sup>2</sup>
a	dekadischer Vorsatz	atto	Vielf	1 a = 10 <sup>-18</sup>
A	Stromstärke	Ampere	SI-Basis	
Å	Länge	Ångström	Zusatz	1 Å = 0.1nm = 10 <sup>-10</sup> m
acre	Fläche	USA	Ausland	1 acre = 4076.8 m <sup>2</sup>
asb	Leuchtdichte	Apostilb	Ausland	1 asb = 0.318 cd m <sup>-2</sup>
at	Druck	technische Atmosphäre	alt	1 at = 98066.5 Pa
atm	Druck	physikalische Atmosphäre	alt	1 atm = 101325 Pa
b	Fläche	Barn	alt	1 b = 10 <sup>-28</sup> m <sup>2</sup>
bar	Druck		Zusatz	1 bar = 1000 hPa = 10 <sup>5</sup> Pa
mbar	Druck	millibar	Zusatz	1 mbar = 1 hPa
bu	Volumen	bushel, USA	Ausland	1 bu = 0.03523 m <sup>3</sup>
BTU	Wärmemenge	Britisch Thermal Unit	Ausland	1 BTU = 1055.06 J
c	dekadischer Vorsatz	Zenti	Vielf	c = 10 <sup>-2</sup>
cal	Wärmemenge	Kalorie	alt	1 cal = 4.1868 J
cd	Lichtstärke	Candela	SI-Basis	
c/s	Kreisfrequenz	cycles per second	Ausland	c/s = s <sup>-1</sup>
C	Ladung	Coulomb	SI-abgl.	1 C = 1 As
°C	Temperatur	Celsius	Zusatz	θ/°C = T/K - 273.2
Ci	Aktivität	Curie	alt	1 Ci = 37*10 <sup>9</sup> s <sup>-1</sup>
CTU	Wärmemenge	Centigrade Thermal Unit	Ausland	1 CTU = 1.89851 J
d	Zeit	dies (Tag)	Zusatz	1 d = 86400 s
d	dekadischer Vorsatz	dezi	Vielf	1 d = 10 <sup>-1</sup>
da	dekadischer Vorsatz	deka	Vielf	1 da = 10 <sup>1</sup>
deg	Temperatur	degree	Ausland	1 deg = 1K
dpt	inverse Länge	Dioptrie	Zusatz	1 dpt = 1m <sup>-1</sup>
dyn	Kraft		alt	1 dyn = 10 <sup>-5</sup> N
Dez	Winkel		Ausland	1 Dez = 10°
E	dekadischer Vorsatz	Exa	Vielf	E = 10 <sup>18</sup>

	physikalische Größe	Beschreibung, Name	Art	Umrechnung
erg	Arbeit		alt	1 erg = 10 <sup>-7</sup> J
eV	Energie	Elektronenvolt	Zusatz	1 eV = 1.602*10 <sup>-19</sup> J
f	dekadischer Vorsatz	femto	Vielf	1 f = 10 <sup>-15</sup>
ft	Länge	foot / feet (Fuß)	Ausland	1 ft = 0.3048 m
ft <sup>2</sup>	Fläche	square foot	Ausland	1 ft <sup>2</sup> = 0.0929 m <sup>2</sup>
ft <sup>3</sup>	Volumen	cubic foot	Ausland	1 ft <sup>3</sup> = 0.02832 m <sup>3</sup>
ftlb	Arbeit	foot-pound	Ausland	1 ftlb = 1.356 J
ftcd	Beleuchtungsstärke	foot-candle	Ausland	1 ftcd = 10.763 lx
ftla	Leuchtdichte	foot-Lambert	Ausland	1 ftla = 3.426*10 <sup>4</sup> cdm <sup>-2</sup>
F	Kapazität		SI-abgl.	1 F = 1 AsV <sup>-1</sup>
°F	Temperatur	Grad Fahrenheit	Ausland	t/°F = 1.8*t/°C + 32
g	Masse	Gramm	Zusatz	1 g = 10 <sup>-3</sup> kg
gal	Volumen	US gallon	Ausland	1 gal = 3.785 l
gal	Volumen	imp. gallon (UK)	Ausland	1 gal = 4.546 l
grd	Temperaturdifferenz		alt	1 grd = 1 K
G	dekadischer Vorsatz	Giga	Vielf	G = 10 <sup>9</sup>
G	Flußdichte	Gauß	alt	1 G = 10 <sup>-4</sup> T
Gb	magnetische Spannung	Gilbert	Ausland	1 Gb = 0.796 A
Gal	Beschleunigung		alt	1 Gal = 0.01 ms <sup>-2</sup>
h	Zeit	hora (Stunde)		1 h = 3600 s
h	dekadischer Vorsatz	Hekto		h = 10 <sup>2</sup>
h.p.	Leistung	horse power	Ausland	1 h.p. = 745.7 W
ha	Fläche	Hektar	Zusatz	1 ha = 10 <sup>4</sup> m <sup>2</sup>
H	Induktivität	Henry	SI-abgl.	1 H = 1 VsA <sup>-1</sup>
Hz	Frequenz	Hertz	Zusatz	1 Hz = s <sup>-1</sup>
in	Länge	Inch (Zoll)	Ausland	1 in = 25.4 mm
in <sup>2</sup>	Fläche	Square Inch	Ausland	1 in <sup>2</sup> = 6.5416 cm <sup>2</sup>
inHg	Druck	Inch Mercury	Ausland	1 inHg = 3386 Pa
J	Arbeit, Energie, Wärmemenge	Joule	SI-abgl.	1 J = 1 Nm = 1 Ws
k	dekadischer Vorsatz	Kilo	Vielf	k = 10 <sup>3</sup>
kg	Masse	Kilogramm	SI-Basis	
kp	Kraft	Kilopond	alt	1 kp = 9.80665 N
kcal	Wärmemenge	Kilokalorie	alt	1 kcal = 4186.8 J
kWh	Arbeit, Energie	Kilowattstunde	Zusatz	1 kWh = 3.6*10 <sup>6</sup> J = 3.6*10 <sup>6</sup> Ws
kn	Geschwindigkeit	Knoten	Zusatz	1 kn = 0.5144 ms <sup>-1</sup>
kp/cm <sup>2</sup>	Druck		alt	1 kp/cm <sup>2</sup> = 98066.5 Pa
kpm	Drehmoment, Arbeit	Kilopondmeter	alt	1 kpm = 9.80665 Nm
K	absolute Temperatur	Kelvin	SI-Basis	
Kt	Masse	Karat	Zusatz	1 Kt = 0.0002 kg
l	Volumen	Liter	Zusatz	1 l = 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>
la	Leuchtdichte	Lambert	Ausland	1 la = 3.18*10 <sup>3</sup> cd m <sup>-2</sup>
lb	Kraft	pound	Ausland	1 lb = 4.448 N
lb/in <sup>2</sup>	Druck	pound per square inch	Ausland	1 lb/in <sup>2</sup> = 6895 Pa
lm	Lichtstrom	Lumen	SI-abgl.	1 lm = 1 cd*sr
lm*s	Lichtmenge	Lumensekunde	SI-abgl.	1 lm*s = 1 cd*sr*s
lx	Beleuchtungsstärke	Lux	SI-abgl.	1 lx = 1 lm/m <sup>2</sup>
lx*s	Belichtung	Luxsekunde	SI-abgl.	
Lj	Länge	Lichtjahr	Zusatz	1 Lj = 9.46051*10 <sup>15</sup> m
m	Länge	Meter	SI-Basis	
m	dekadischer Vorsatz	milli	Vielf	m = 10 <sup>-3</sup>
m <sup>2</sup>	Fläche		SI-Zusatz	
m <sup>3</sup>	Volumen		SI-Zusatz	
ma	dekadischer Vorsatz	Myria	Ausland	ma = 10 <sup>4</sup>
mb	Druck	millibar	alt	1 mb = 100 Pa = 1 hPa
mi	Länge	(status) Meilen	Ausland	1 mi = 1609.344 m
mi <sup>2</sup>	Fläche	Quadrat Meilen	Ausland	1 mi = 2.59 km <sup>2</sup>
mil	Länge	Mil	Ausland	1 mil = 25.4*10 <sup>-6</sup> m
min	Zeit	Minute	Zusatz	1 min = 60 s



	physikalische Größe	Beschreibung, Name	Art	Umrechnung
mmHg	Druck	Millimeter Quecksilber	alt	1 mmHg = 133.322 Pa
mol	Stoffmenge	Mol	SI-Basis	
mWs	Druck	Meter Wassersäule	alt	1 mWs = 9806.65 Pa
M	dekadischer Vorsatz	Mega	Vielf	$M = 10^6$
Mx	magnetischer Fluss	Maxwell	Ausland	$1 Mx = 10^{-8} Wb = 10^{-8} Vs$
n	dekadischer Vorsatz	nano	Vielf	$n = 10^{-9}$
N	Kraft	Newton	SI-abgl.	$1 N = 1 kgms^{-2}$
Nm	Arbeit, Drehmoment	Newtonmeter	SI-Zusatz	$1 Nm = 1 J = 1 Ws = 1 VAs$
N/m <sup>2</sup>	Druck		SI-Zusatz	$1 N/m^2 = 1 Pa$
Ns	Impuls	Newtonsekunde	SI-Zusatz	
NM	Länge	nautische Meile	Zusatz	1 NM = 1852 m
Oe	magnetische Feldstärke	Oerstedt	alt	$1 Oe = 79.58 Am^{-1}$
p	dekadischer Vorsatz	pico	Vielf	$p = 10^{-12}$
p	Kraft	Pond	alt	$1 p = 0.009806 N$
P	dekadischer Vorsatz	Peta	Vielf	$P = 10^{15}$
P	dynamische Viskosität	poise		$1 P = 0.1 Pas$
Pa	Druck	Pascal	SI-abgl.	$1 Pa = 1 Nm^{-2}$
Pa*s	dynamische Viskosität	Pascalsekunde	SI-Zusatz	
PS	Pferdestärke	Leistung	alt	$1 PS = 735.498 W$
rad	Winkel	Radian	SI-Sond.	[rad] = 1
rad*s <sup>-1</sup>	Winkelgeschwindigkeit		SI-Sond.	$rad*s^{-1} = s^{-1}$
rad*s <sup>-2</sup>	Winkelbeschleunigung		SI-Sond.	$rad*s^{-2} = s^{-2}$
rd	Energiedosis	Rad	alt	$1 rd = 0.01 J/kg$
rem	Energiedosis	Rem	alt	$1 rem = 0.01 J/kg$
R	Ionendosis	Röntgen	alt	$1 R = 0.258 mCkg^{-1}$
°R	Temperatur	Grad Rankine	Ausland	$T/K = 1.8*t/°R + 459.67$
°Re	Temperatur	Grad Reaumur	Ausland	$T/K = 0.8*t/°Re + ?$
s	Zeit	Sekunde	SI-Basis	
s <sup>-1</sup>	Frequenz, Drehzahl, Aktivität		SI-Zusatz	
sb	Leuchtdichte	stilb	alt	$1 sb = 10^4 cdm^{-2}$
sm	Länge	Seemeile	Ausland	1 sm = 1852 m
sr	Raumwinkel	Steradian	SI-Sond.	[sr] = 1
st	Kinematische Viskosität	Stokes	alt	$1 st = 10^{-4} m^2 s^{-1}$
sqft	Fläche	Square Foot	Ausland	$1 sqft = 0.0929 m^2$
sqyd	Fläche	Square Yard	Ausland	$1 sqyd = 0.836 m^2$
S	Leitwert	Siemens	SI-abgl.	$1 S = 1 \Omega^{-1} = 1 A/V$
Sm <sup>-1</sup>	elektrische Leitfähigkeit		SI-Sond.	$1 Sm^{-1} = 1 AV^{-1}m^{-1}$
t	Masse	Tonne	Zusatz	$1 t = 10^3 kg$
tex	längenbezogene Masse	Tex	Zusatz	$1 tex = 10^{-6} kgm^{-1}$
T	dekadisches Vielfaches	Tera	Vielf	$T = 10^{12}$
T	magnetische Flußdichte	Tesla	SI-abgl.	$1 T = 1 Vsm^{-2}$
Torr	Druck	Torr	alt	1 Torr = 133.322 Pa
u	atomare Masseneinheit		Zusatz	$1 u = 1.66*10^{-27}kg$
V	elektrische Spannung, Potential	Volt	SI-abgl.	$1 V = 1 kgm^2 A^{-1} s^{-3}$
VA	Scheinleistung, Leistung	Voltampere	SI-Zusatz	$1 VA = 1 W$
Vm <sup>-1</sup>	elektrische Feldstärke		SI-Zusatz	
W	Leistung	Watt	SI-abgl.	$1 W = 1 VA = 1 Nms^{-1} = 1 Js^{-1} = 1 kgm^2 s^{-3}$
Wb	magnetische Fluss	Weber	SI-abgl.	$1 Wb = 1 Vs$
Wbm <sup>-2</sup>	magnetische Flussdichte		SI-Zusatz	$1 Wbm^{-2} = 1 Vsm^{-2} = 1 T$
Wkg <sup>-1</sup>	Energiedosisrate		SI-Zusatz	
Ws	Energie, Arbeit	Wattsekunde	SI-Zusatz	$1 Ws = 1 VAs = 1 Nm = 1 J = 1 kgm^2 s^{-2}$
Wsr <sup>-1</sup>	Strahlstärke		SI-Zusatz	
yd	Länge	Yard	Ausland	1 yd = 0.91440 m
Zoll	Länge	Zoll ("), inch	Ausland	1" = 1 Zoll = 0.0254 m
Ω	Widerstand	Ohm	SI-abgl.	$1 \Omega = 1 VA^{-1}$

Tabelle 1.3: Einheiten in verschiedenen Systemen, Auswahl

### 1.3.4. Das Rechnen mit Einheiten

Bei jeder physikalischen Größengleichung (siehe Abschnitt 1.1) müssen u.a. auch Einheiten multipliziert werden. In diesem Abschnitt wird die Vorgehensweise erläutert. Bei reinen SI-Einheiten ist der Vorteil, dass sich als Ergebnis wieder eine SI-Einheit der entsprechenden physikalischen Größe ergibt. Eine Einheitenverknüpfung ist in diesen Fall nicht unbedingt notwendig, aber sehr ratsam. Bei falscher Formelumstellung oder bei Vergessen eines Multiplikanden ergibt sich über die Einheitenkontrolle das Auffinden eines Fehlers. Folgende schematisierte Reihenfolge führt zum Ergebnis:

- Evtl. auftretende zusätzliche ("Zusatz"), ausländische ("Ausland") oder alte ("alt") Einheiten nach Spalte 5, Tabelle 1.3 durch SI-Einheit ersetzen.
- Dekadische Vielfache nach Tabelle 1.1 durch Zehnerpotenzen ersetzen.
- Abgeleitete SI-Einheiten evtl. durch Tabelle 1.2, Spalte 3 oder Spalte 5 ersetzen. In der Elektrotechnik wird meist Spalte 5 verwendet, da das "Volt" nicht durch kg u.s.w. ersetzt wird.
- Zahlenwert berechnen.
- Zahlenwert evtl. mit dekadischen Vielfachen umformen.
- Die sich ergebende Einheit vergleichen mit der zu erwartenden Einheit (evtl. mit Hilfe von Tabelle 1.2).

#### Beispiel 1:

$$l = \frac{5 \mu\text{m} * 7 \text{ cm} * (9 \text{ mm})^2}{30 \text{ mm} * 10 \text{ cm}^2}$$

ersetzen:

$$\mu = 10^{-6}$$

$$\text{c} = 10^{-2}$$

$$\text{m}^2 = (10^{-3})^2 = 10^{-6}$$

$$\text{m} = 10^{-3}$$

$$\text{c}^2 = (10^{-2})^2 = 10^{-4}$$

$$l = \frac{5 * 10^{-6} \text{ m} * 7 * 10^{-2} \text{ m} * 9^2 * 10^{-6} \text{ m}^2}{30 * 10^{-3} \text{ m} * 10 * 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$l = 0.945 * 10^{-6} \text{ m} = 0.945 \mu\text{m}$$

Der Schritt Ersetzen beim oberen Beispiel kann bei einiger Routine entfallen. Z.B. wird "μ" sofort durch  $10^{-6}$  ersetzt.

#### Beispiel 2:

$$I = \frac{4 \text{ W}}{200 \text{ V}}$$

ersetzen:

$$\text{W} = \text{VA}$$

$$I = \frac{4 \text{ VA}}{200 \text{ V}} = 0.02 \text{ A} = 20 * 10^{-3} \text{ A} = 20 \text{ mA}$$

Einheit A für I (laut Tabelle 1.2) korrekt.

**Beispiel 3:**

$$R = \frac{(0.2 \text{ kV})^2}{8 \text{ mW}}$$

ersetzen:  $k = 10^3$ ,  $W = \text{VA}$ ,  $m = 10^{-3}$

$$R = \frac{(0.2 * 10^3 \text{ V})^2}{8 * 10^{-3} \text{ VA}} = 5 * 10^6 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

ersetzen:  $10^6 = \text{M}$   $\text{V/A} = \Omega$

$$R = 5 \text{ M}\Omega \quad \text{Einheit korrekt}$$

**Beispiel 4:**

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 0.278 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Beispiel 5:**

$$1 \frac{\text{h.p.}}{\text{in}^2} = \frac{745.7 \text{ W}}{6.542 * 10^{-4} \text{ m}^2} = 1.140 * 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$1.140 * 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1.140 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2} = 1.140 \frac{\text{W}}{(10^{-3} \text{ m})^2} = 1.14 \frac{\text{W}}{\text{mm}^2}$$

**Beispiel 6:**

$$1 = \frac{96 \mu \text{ m} * 20 \text{ mm}^2 * 5 \text{ cm}^2 * (10^{-2} \text{ km})^2}{8 \text{ mm}^2 * 6 \text{ cm}^3 * 5 \text{ km}}$$

$$1 = \frac{96 * 10^{-6} \text{ m} * 20 * 10^{-6} \text{ m}^2 * 5 * 10^{-4} \text{ m}^2 * (10^{-2} * 10^3 \text{ m})^2}{8 * 10^{-6} \text{ m}^2 * 6 * 10^{-6} \text{ m}^3 * 5 * 10^3 \text{ m}}$$

$$1 = 0.0004 \text{ m} = 0.4 * 10^{-3} = 400 * 10^{-6} \text{ m} = 0.4 \text{ mm} = 400 \mu \text{m}$$

**Beispiel 7:**

$$U = \sqrt{4 \text{ MW} * 10 \text{ m}\Omega}$$

$$U = \sqrt{4 * 10^6 \text{ VA} * 10 * 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{A}}} = \sqrt{40000 \text{ V}^2} = 200 \text{ V}$$

## 1.4. Schreibweise und Konventionen

### Buchstabenart

Mit **großen Buchstaben** werden Gleichstromgrößen und Effektivwerte bezeichnet. Zeitabhängige Größen erhalten in der Regel **kleine Buchstaben** als Formelzeichen.

### Komplexe Zahlen

Im Gegensatz zur theoretischen Mathematik erhält zur Kennzeichnung einer komplexen Zahl die physikalische Größe einen waagerechten Strich unterhalb des Formelbuchstabens.

**Beispiel:**  $\underline{U} = 20 \text{ V} + j30 \text{ V}$

### Vektoren

Gerichtete physikalische Größen sind Vektoren, die mit einem Pfeil über dem Formelzeichen gekennzeichnet werden. In alten Lehrbüchern werden Vektoren mit deutschen Buchstaben dargestellt. In Druckwerken findet man Vektoren auch in fett oder kursiv ausführt.

**Beispiel:** Kraft  $\vec{F}$

### Matrizen und Vektoren als Zusammenfassung vom Komponenten

Anwendung: Mehrere Widerstände oder mehrere Ströme werden zu Vektoren zusammengefasst. Diese Zusammenfassungen werden mit einem waagerechten Strich über dem Formelbuchstabe bezeichnet. In Druckwerken ist wiederum die Ausführung fett oder kursiv üblich. Auch der waagerechte Strich unter dem Formelbuchstaben ist manchmal üblich. Dieses ist aber zur Unterscheidung von komplexen Zahlen in der Elektrotechnik nicht üblich.

### Normierung

Bei größeren Zahlenrechnungen (z.B. Lösungen von linearen Gleichungssystemen) ist es lästig, immer die Einheiten zu notieren. Es wird dann auf eine physikalische Größe normiert. Im Rahmen dieser Verlesung wird wie folgt normiert als Beispiel:

$U_{\text{Norm}} = 1 \text{ V}$  Normierungsspannung (alle Größen sind auf 1 V bezogen)

$U = 15 \text{ V}$  tatsächlich Spannung

$U^{\text{N}} = \frac{U}{U_{\text{Norm}}} = 15$  normierte Spannung

## 1.5. Ein paar Daten zur Geschichte der Elektrotechnik

**600 v. Chr.:** Thales von Milet beobachtet die elektrisierende Wirkung von Bernstein.

**1800:** Alessandro Volta beschreibt die nach ihm benannte Voltasche Säule, die erste brauchbare Stromquelle, eine Batterie.

**1820:** Hans Christian Oersted stellt fest, dass eine Magnetnadel durch einen stromdurchflossenen Draht abgelenkt wird und findet damit die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes.

**1825:** William Sturgeon baut den ersten Elektromagneten.

**1826:** Georg Simon Ohm formuliert das nach ihm benannte Gesetz der Elektrizitätsleitung.

**1831:** Michael Faraday entdeckt die elektromagnetische Induktion.

**1834:** Moritz Hermann von Jacobi konstruiert in Königsberg eine erste elektrische Maschine.

**1854:** Heinrich Goebel erfindet eine elektrische Glühlampe mit Bambus-Kohlefaden.

**1866:** Werner von Siemens erfindet - gleichzeitig mit Charles Wheatstone und Samuel Alfred Varley - den Dynamo (Generator) für die Stromerzeugung.

**1879:** Vorführung einer elektrischen Eisenbahn auf der Berliner Gewerbeausstellung durch Siemens.

**1879:** Thomas Alva Edison und Joseph Wilson Swan stellen Glühlampen mit Kohlefaden her.

**1882:** Kraftübertragung von Miesbach nach München (57 km). Obwohl nur 22 % des eingespeisten Gleichstromes in der bayerischen Hauptstadt ankommen, geben Marcel Depréz und Oskar von Miller mit ihrem Versuch den Anstoß für weitere Bemühungen, Elektrizität zentral zu erzeugen und über Leitungsnetze weiträumig zu verteilen.

**1882:** Die ersten elektrischen Straßenlampen Berlins erleuchten die Leipziger Straßen, den Potsdamer Platz und die Kochstraße.

**1884:** Auf der Internationalen Elektrizitätsausstellung in Turin wird ein Transformator (Sekundärgenerator) von Lucien Gaulard und John d. Gibbs gezeigt, mit dessen Hilfe Wechselstrom auf 2000 Volt hochgespannt und dann über 40 km übertragen werden kann.

**1884:** Gründung des ersten öffentlichen Elektrizitätsversorgungsunternehmens in Deutschland - der AG Städtische Elektrizitäts-Werke in Berlin (später Bewag)

**1885:** Galileo Ferraris erkennt das magnetische Drehfeld und baut einen ersten Zweiphasigen-Induktionsmotor.

**1887:** Friedrich August Haselwander baut einen dreiphasigen Synchrongenerator für die Erzeugung von Drehstrom und beleuchtet damit die Hutfabrik Adrion in Offenburg.

**1888:** Heinrich Hertz weist die Existenz von elektromagnetischen Wellen nach.

**1889:** Michael O. Dobrowolski baut einen Drehstrommotor mit Kurzschlussläufer.

**1891:** Erste Drehstrom-Kraftübertragung über größere Entfernungen von Lauffen nach Frankfurt am Main durch Oskar von Miller (175 km, Wirkungsgrad 70 %)

**1948:** Patent auf Transistor, Erster Bipolartransistor

**etwa 1960:** Erster Thyristor, erste integrierte Schaltungen

**etwa 1970:** Erster Mikroprozessor, erster Operationsverstärker

## 1.6. Aufgaben und Fragen

Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
AF.1.A	Eine physikalische Größe ergibt sich aus: * Zahlenwert mal Einheit * Zahlenwert plus Einheit * Zahlenwert minus Einheit	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.1.B	Es gibt folgende physikalische Gleichungsarten: * Größengleichungen * Einheitsgleichungen * Einheitengleichungen * Absolutgleichungen * zugeschnittene Größengleichungen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.1.C	Die Gleichung $W = F \cdot s$ ist eine: * Größengleichung * Einheitengleichung * zugeschnittene Größengleichung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.1.D	Die Gleichung $1 \text{ V} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-1}$ ist eine: * Größengleichung * Einheitengleichung * zugeschnittene Größengleichung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.1.E	Die Gleichung $\frac{U}{V} = \frac{I}{mA} * \frac{R}{k\Omega}$ ist eine: * Größengleichung * Einheitengleichung * zugeschnittene Größengleichung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.1.F	Die Gleichung $100 \text{ V} = 250 \Omega \cdot 0.4 \text{ A}$ ist eine: * Größengleichung * Einheitengleichung * zugeschnittene Größengleichung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.1.G	Es gibt folgende physikalische Einheitenarten: * SI-Basiseinheiten * Währungseinheiten * SI-abgeleitete Einheiten * SI-Zusatzeinheiten * Auslandseinheiten * alte Einheiten	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Auswahlfrage	Unterteilen Sie folgende Größen	Gleichwert	zeitabhängig
AF.1.H	u(t)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	u	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	U	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	i(t)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	I	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	i	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	p(t)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	p	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	P	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Auswahlfrage	Unterteilen Sie folgende Größen	physikalischer Vektor	Zusammenfassung von Komponenten
AF.1.I	$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.1.J	$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

<b>Frage 1.A</b>	Eine physikalische Größe besteht aus:
<b>Frage 1.B</b>	Es gibt folgende drei physikalische Gleichungsarten:  <div style="text-align: center;">           -----            -----            -----         </div>
<b>Frage 1.C</b>	Geben Sie den auf mit 1 % Genauigkeit gemessen Wert $I = 1.0325 \text{ mA}$ mit vernünftiger Stellenzahl an:
<b>Frage 1.D</b>	Geben Sie den auf mit 0.1 % Genauigkeit gemessen Wert $I = 1.0325 \text{ mA}$ mit vernünftiger Stellenzahl an:
<b>Frage 1.E</b>	Geben Sie den auf mit 10 % Genauigkeit gemessen Wert $I = 1.0325 \text{ mA}$ mit vernünftiger Stellenzahl an:
<b>Frage 1.F</b>	Geben Sie den auf mit 1 % Genauigkeit gemessen Wert $I = 0.9834 \text{ mA}$ mit vernünftiger Stellenzahl an:
<b>Frage 1.G</b>	Geben Sie die signifikante Stellenzahl an:  <div style="text-align: center;">           123.456      ---            12            ---            123           ---            0.0123      ---         </div>

**Frage 1.H** Geben Sie die SI-Basiseinheit an:

**Physikalische Größe**

**Einheit**

-----	---
-----	---
-----	---
-----	---
-----	---
-----	---
-----	---

**Frage 1.D** Ordnen Sie die Art der Einheit zu:

**Physikalische Größe**

**Einheit**

**Art der Einheit**

U - Spannung	V - Volt	-----
I - Stromstärke	A - Ampere	-----
F - Kraft	N - Newton	-----
R - Widerstand	$\Omega$ - Ohm	-----
t - Zeit	s - Sekunde	-----
t - Zeit	min - Minute	-----
t - Zeit	h - Stunde	-----
B - Flussdichte	G - Gauß	-----
B - Flussdichte	T - Tesla	-----
l - Länge	in - Inch	-----
l - Länge	m - Meter	-----
m - Masse	kg - Kilogramm	-----
T - Temperatur	K - Kelvin	-----
$^{\circ}\text{C}$ - Temperatur	$^{\circ}\text{C}$ - Grad Celsius	-----



<b>Aufgabe 1.A</b>	$l = \frac{6 \text{ km} * 7 \mu\text{m} * (4 \text{ mm})^2}{3 \text{ mm} * 8 \text{ cm}^2}$
<b>Aufgabe 1.B</b>	$P = \frac{(220 \text{ V})^2}{11 \Omega}$
<b>Aufgabe 1.C</b>	$P = \frac{6000 \text{ J}}{5 \text{ min}}$
<b>Aufgabe 1.D</b>	$I = \sqrt{\frac{5 \text{ kW}}{12.5 \Omega}}$
<b>Aufgabe 1.E</b>	$P = 200 \text{ Nm} * 1200 \frac{1}{\text{min}}$
<p><b>Aufgabe 1.F</b> (ohne Unterlagen) Geben Sie die folgende physikalische Größe in elektrischen Einheit V-A-m*s (Volt-Ampere-Meter-Sekunde) an:</p> <p>Druck <math display="block">p = 12 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 12 \text{ Pa}</math></p>	
<p><b>Aufgabe 1.G</b> (ohne Unterlagen) Geben Sie die folgende physikalische Größe in SI-Basis-Einheit an:</p> <p>Widerstand <math>R = 12.9 \text{ k}\Omega</math></p>	

2. Der einfache Gleichstromkreis	17
2.1. Definitionen und Grundbegriffe	17
2.1.1. Atommodelle und Molekülmodelle	17
2.1.2. Was ist Strom	18
2.1.3. Was ist Spannung	19
2.1.4. Stromleitung im Elektrolyten	20
2.1.5. Stromleitung in Metallen	21
2.1.6. Ladung	21
2.1.7. Zusammenhang Ladung und Strom	22
2.1.8. Stromdichte	22
2.1.9. Ladungsträger-Geschwindigkeit in einem Leiter	22
2.1.10. Minimal-Stromkreis	24
2.1.11. Wirkung des elektrischen Stromes	24
2.1.12. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.1	25
2.2. Ohmsches Gesetz	30
2.2.1. Formabhängigkeit des Widerstandes	31
2.2.2. Temperaturabhängigkeit von Widerständen	33
2.2.3. Material-Werte	34
2.2.4. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.2	35
2.3. Kirchhoffsche Regeln	38
2.3.1. Erstes Kirchhoffsche Gesetz	38
2.3.2. Zweites Kirchhoffsche Gesetz	39
2.3.3. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.3	40
2.4. Ersatzwiderstände	43
2.4.1. Ersatzreihenwiderstand	43
2.4.2. Ersatzparallelwiderstand	44
2.4.3. Berechnung von Netzen mit einer Spannungsquelle mit Hilfe des Ersatzwiderstandes	45
2.4.4. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 2.4	48
2.5. Strom- und Spannungsteiler	49
2.5.1. Spannungsteiler	49
2.5.2. Stromteiler	51
2.5.3. Potentiometer als Spannungsteiler	52
2.5.3.1. Unbelastetes Potentiometer	52
2.5.3.2. Belastetes Potentiometer	53
2.5.4. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.5	54
2.6. Strom- Spannungs- und Widerstandsmessungen	56
2.6.1. Strom-Messung	56
2.6.1.1. Prinzip und ESB	56
2.6.1.2. Messbereichserweiterung	57
2.6.2. Spannungsmessung	58
2.6.2.1. Prinzip und ESB	58
2.6.2.2. Messbereichserweiterung	59
2.6.3. Widerstandsmessung	60
2.6.3.1. Ohmsches Gesetz	60
2.6.3.2. Direkt anzeigende Widerstandsmessgeräte	60
2.6.3.3. Widerstands-Messbrücke	61
2.6.3.3.1. Prinzip	61
2.6.3.3.2. Messung mit dekadischen Normal-Widerständen	64
2.6.3.3.3. Messung mit Potentiometer	64
2.6.4. Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.6	65
2.7. Ersatzquellen	66
2.7.1. Ersatz-Spannungsquelle	66
2.7.1.1. Ersatzschaltbild	66
2.7.1.2. Kennlinie der Quelle	67
2.7.1.3. Grafische U-Bestimmung	68
2.7.2. Ersatz-Stromquelle	70
2.7.2.1. Ersatzschaltbild	70

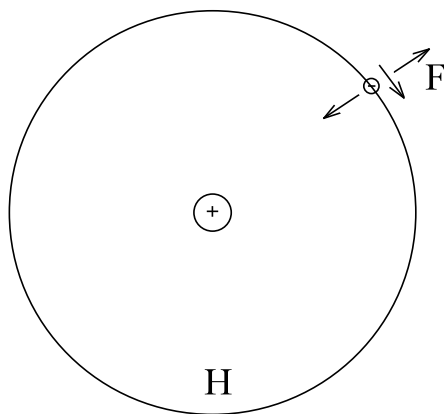
2.7.2.2. Kennlinie .....	70
2.7.2.3. Belastete Stromquelle .....	71
2.7.3. Umrechnung zwischen Ersatz- Strom- und Spannungsquelle .....	71
2.7.4. Geregeltes Netzteil .....	72
2.7.5. Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.7 .....	73

## 2. Der einfache Gleichstromkreis

### 2.1. Definitionen und Grundbegriffe

Bevor die Frage beantwortet werden soll, was Strom und Spannung ist, sollen einfache Atommodelle kurz wiederholt werden.

#### 2.1.1. Atommodelle und Molekülmodelle



Durchmesser Atomkern:	$20 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Durchmesser Elektron:	$3 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Abstand Atomkern Elektron:	$50000 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

Bild EG211A: Modell des Wasserstoff-Atoms

Das Modell des Wasserstoff-Atoms basiert auf der Vorstellung einer positiven Kernladung und einer negativen Ladung des Elektrons. Das Elektron bewegt sich in einer bestimmten Entfernung auf einer Kreis- oder Kugelbahn

mit einer bestimmten Geschwindigkeit um den Kern. Ungleiche Ladungen ziehen sich an. Das Kräfte-Gleichgewicht wird durch die Zentrifugalkraft wieder hergestellt. In der modernen Physik wird die Elektronenbewegung sowohl als Teilchenbewegung (leichter verständlich) als auch als Welle angesehen. Bei der Wellentheorie wird mit Aufenthaltswahrscheinlichkeiten gerechnet. Hier soll nur die Bewegung anhand von Teilchen diskutiert werden. Zu vermuten ist, dass Ladungsträger etwas mit Strom und Spannung zu tun haben.

Beim oberen Wasserstoff Atom ist es schwer, die beiden Ladungen zu trennen, weil diese relativ fest miteinander verbunden sind.

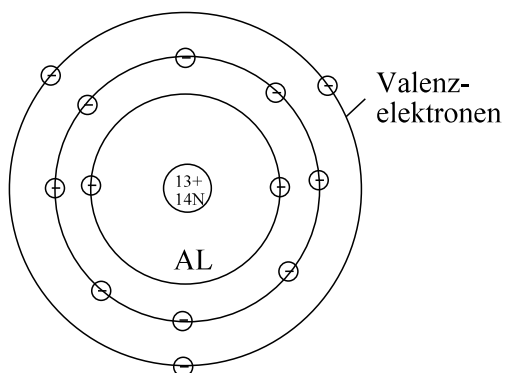


Bild EG211B: Aluminium-Atom

Anders sieht die Bindung der Ladung z.B. bei Aluminium aus. Aluminium hat im Kern 13 positive Protonen und zusätzlich 14 neutrale Neutronen. Die innerste Elektronenschale ist mit zwei Elektronen besetzt und die zweite mit acht. Damit Ladungsgleichgewicht herrscht, müssen auch die 3 restlichen Kernladungen mit negativ geladenen Elektronen kompensiert werden. Diese negativen Ladungen befinden in der äußersten Schale relativ lose an den Kern angebunden. Die Elektronen in den äußeren Bahnen werden Valenzelektronen genannt.

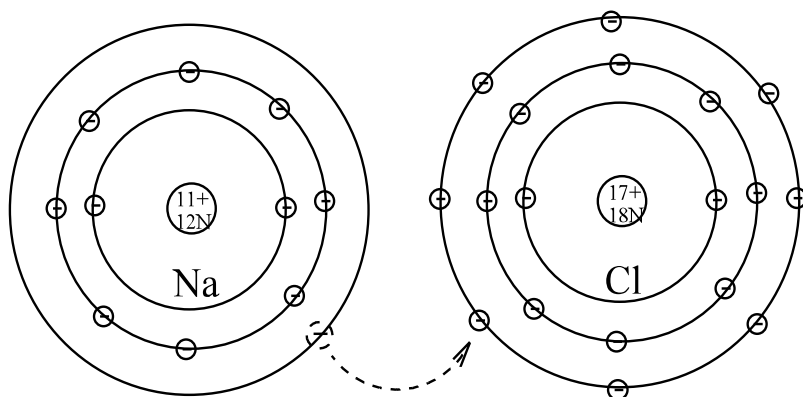


Bild EG211C: Salz-Molekül (Natrium und Chlor) NaCl

Die Molekül-Bindung beruht darauf, dass ein System (hier Molekül) möglichst ein Energieminimum hat. Gibt das Natrium-Atom ein Elektron an das Chlor-Atom ab, ist die äußere Schale des Na-Atoms leer und die des Cl-Atoms voll. Dieses bewirkt die sogenannte molekulare Anziehung. Weil das Na-Atom ein Elektron abgegeben hat, ist es ladungsmäßig "eins" positiv. Das Cl-Atom hat ein Elektron aufgenommen, darum ist es ladungsmäßig "eins" negativ. Positiv und negative Ladungen ziehen sich an, daher die molekulare Bindung.

### 2.1.2. Was ist Strom

Behauptung: **Strom ist die geordnete Bewegung von Ladungsträgern.**

#### Definition der Stromrichtung

Die Bewegung von Ladungsträgern wurde als erstes im Elektrolyten (elektrisch leitende Flüssigkeit) anhand von positiven Ionen (vergleiche ionisiertes Na-Atom in Bild EG21C) entdeckt. Historisch wurde somit die beobachtete Richtung als Stromrichtung definiert. **Die technische Stromrichtung ist die Richtung von positiven Ladungsträgern.**

**Formelbuchstabe** I

#### Einheit

Als Einheit des Stromes wurde eine SI-Basis-Einheit eingeführt, das Ampere, als Abkürzung "A".

$$[I] = 1 \text{ A}$$

#### Definition des Amperes:

1 A ist die Stärke eines zeitlich unveränderten Stromes durch zwei parallele lange Leiter, die im Abstand von 1 m eine Kraft von  $0.2 \cdot 10^{-6}$  N je Meter ausübt.

### 2.1.3. Was ist Spannung

Gesucht ist die Ursache für den Strom. Eine Ladungstrennung verursacht unterschiedliche Raumladungen, die sich aufgrund der Anziehung von Ladungsträgern auszugleichen sucht und dabei einen Strom verursacht. Die Höhe der Wirkung der Ladungsträgertrennung wird als elektrische Spannung bezeichnet.

Der Punkt mit positiver Ladungshäufung wird Pluspol genannt. Der Punkt mit negativer Ladungshäufung Minuspol. Zwischen beiden Punkten tritt die Spannung auf, siehe Bild EG213A.

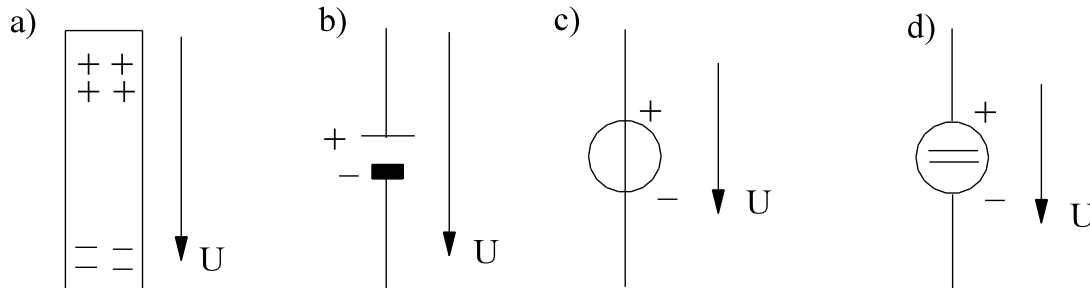


Bild EG213A: a) schematische Ladungstrennung  
b) Schaltzeichen  
c) Ersatzschaltbild (ESB) der idealen Gleichspannungsquelle (neue Norm)  
d) ESB (alte Norm)

In Bild EG213A ist die Ladungstrennung oder auch Spannung schematisch angedeutet. Daneben ist das Schaltzeichen einer Batterie angedeutet. Später wird die Spannungsquelle nur noch als Ersatzschaltbild (ESB) verwendet.

**Spannung:** Ursache: Trennung von Ladungsträgern  
Formelbuchstabe: U  
Einheit: V

Die SI-Einheit der Spannung wurde schon in Abschnitt 1.3.3 erwähnt:

$$[U] = 1 \text{ V} = 1 \text{ kg m}^{-2}\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}$$

Eine detaillierte Herleitung der oberen Einheit wird in Abschnitt 4.1.1 gegeben.

Ladungstrennungen können auf verschiedenen physikalischen Effekte basieren. Näher sollen diese Effekte in Kap. 5 diskutiert werden. In Tabelle 2.1 ist jeweils nur die Angabe des physikalischen Effektes mit Name der technischen Spannungsquelle angegeben. Die physikalischen Erklärungen der Effekte werden später gegeben, teilweise erst in folgenden Semestern.

physikalische Effekte, Wirkung	Gerät
Lorentz-Kraft, Induktion, Magnetismus	Dynamo, Generator
chemische Spannungsreihe	Akku, Batterie
Druck, Piezo-Effekt	Piezo-Generator
Wärme	Thermoelement
Lichtstrahlung	Solarzelle, Fozelle
Reibung, elektrostatische Ladungstrennung	Bandgenerator

Tabelle 2.1: Ursache der Spannung

#### Spannungsbereiche:

Energietechnik: bis 1000 kV  
Nachrichtentechnik:  $\mu\text{V}$  bis zu einigen V  
Gewitter: einige MV, Durchbruchfeldstärke etwa 25 kV/cm

### 2.1.4. Stromleitung im Elektrolyten

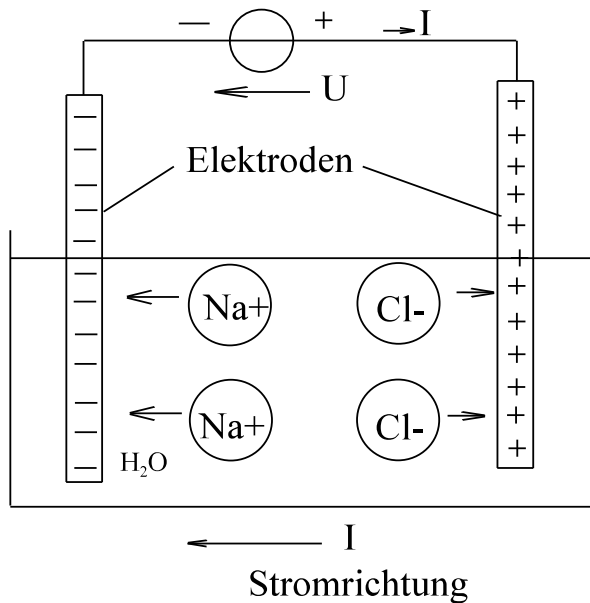


Bild EG214A:

Die Stromleitung im Elektrolyten ist in Bild EG214A schematisch angedeutet. Ein Elektrolyt ist eine elektrisch leitende Flüssigkeit. Der Stromtransport erfolgt durch Ionenbewegung. Was sind Ionen. Diese sind aufgespaltene Moleküle, die dadurch elektrisch geladen werden. Gibt man z.B. Kochsalz (NaCl, siehe Bild EG211C) in Wasser (H<sub>2</sub>O), wird die molekulare Bindung zwischen Na und Cl gelöst und das Salz geht als Lösung ins Wasser. Die Bindung erfolgte durch Elektronenaustausch. Nach der Aufspaltung behält das Chlor-Atom das vom Na abgegebene Elektron und ist somit negativ geladen. Das Na-Atom hat ein Elektron weniger und ist somit über alles (Protonen und Elektronen) gesehen positiv geladen. Beide geladenen Teilchen werden als Ionen bezeichnet.

Unter Anlegen einer Spannung versucht sich der Elektronenmangel und Elektronenüberschuss auszugleichen. Dieses ist möglich. Die negativen Cl<sup>-</sup> Ionen wandern zum Elektronenmangel, also zum positiven Ladungsüberschuss. Jedesmal, wenn ein Cl<sup>-</sup> Ion ankommt, wird eine positive Ladung kompensiert. Gerade entgegengesetzt sind die Verhältnisse an der anderen Elektrode, wo die positiven Na<sup>+</sup> Ionen hin wandern. Dort kompensiert das positive Na<sup>+</sup> Ion ein Elektron.

Weil zu Anfang die Bewegung von positiven Ionen im Elektrolyten beobachtet wurde, ist heute die technische Stromrichtung die Richtung von positiven Ladungsträgern.

### 2.1.5. Stromleitung in Metallen

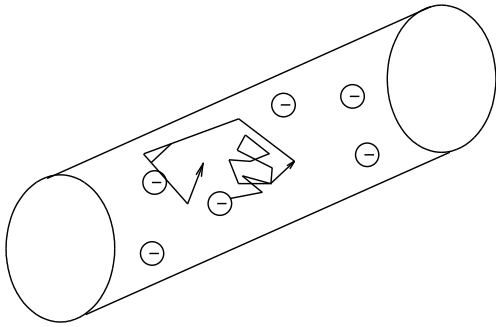


Bild EG215A: Elektronenbewegung ohne Anlegen einer Spannung

Bei Metallen sind in der äußeren Schale nur wenige Elektronen vorhanden. Im Kristall-Gitter sind die Elektronen auf der letzten Schale (Valenzelektronen) relativ frei beweglich. Aufgrund der thermischen Energie bewegen sich die Elektronen im Kristall-Gitter sehr unregelmäßig. Im Mittel tritt keine Ortsveränderung auf, also auch kein Ladungstransport. Dieses ist in Bild EG215A dargestellt.

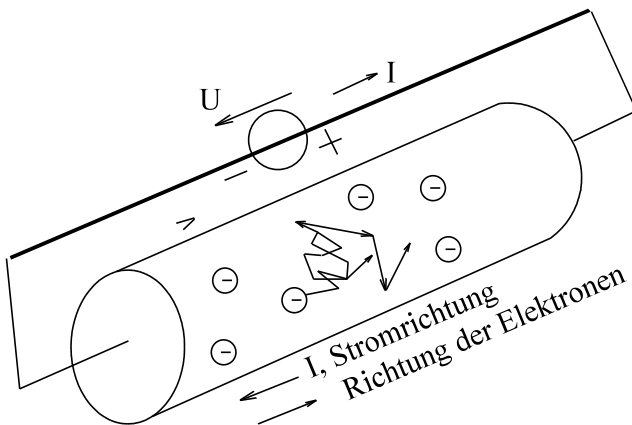


Bild EG215B: Elektronenbewegung bei Anlegen einer Spannung

Bei Anlegen einer Spannung überlagern sich zwei Bewegungen, siehe Bild EG215B. Zur unregelmäßigen Bewegung nach Bild EG215A überlagert sich eine resultierende Bewegung um den Elektronenmangel und -überschuss der Spannungsquelle auszugleichen. Es tritt eine Bewegung von negativen Ladungsträgern (Elektronen) auf. Stromrichtung und Elektronenrichtung sind unterschiedlich.

**Stromrichtung:** außerhalb der Spannungsquelle von plus nach minus (Normalfall)  
innerhalb der Spannungsquelle von minus nach plus (Normalfall)

### 2.1.6. Ladung

Die Ladung eines Elektrons und eines Protons sind betragsmäßig gleich. Der Wert ist eine Naturkonstante. Aus Verständnisgründen sollte die Maßeinheit eigentlich eine SI-Einheit sein, ist es aber nicht, sondern eine abgeleitete.

**Einheit:** 1 C

**Formelzeichen:** Q

Die Elementarladung eines Protons beträgt

$$q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Die Ladung eines Elektrons ist negativ

$$e = -q = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$



### 2.1.7. Zusammenhang Ladung und Strom

Der Strom ist die Bewegung von Ladungen. Bei Gleichstrom ist der Strom nicht von der Zeit abhängig, sondern konstant. Zeitabhängige Größen werden klein geschrieben, konstante Größen mit großen Buchstaben. Die Größe des Stromes ist definiert als die Ladung pro Zeit. Bei zeitlich veränderlichen Größen muss der Differentialquotient geschrieben werden.

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q}{t}$$

**Einheiten:**

$$Q = I \cdot t \\ [Q] = [I] \cdot [t]$$

$$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$$

Obere Herleitung ergibt, dass die abgeleitete SI-Einheit Coulomb (C) in SI-Einheiten Ampere mal Sekunde ist. Dieses lässt sich mit allen abgeleiteten SI-Einheiten durchführen, siehe Tabelle 1.2 und 1.3.

### 2.1.8. Stromdichte

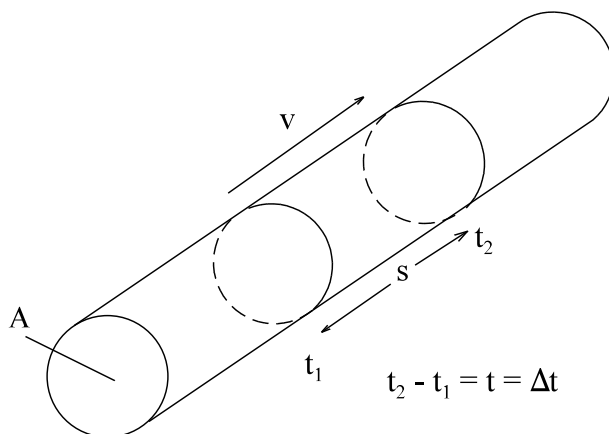
**Definition:** Der Strom pro Fläche wird als Stromdichte bezeichnet

**Formelbuchstabe:** J (oder S)

**Gleichung:**  $J = \frac{I}{A}$

**Einheit:**  $[J] = \frac{[I]}{[A]}$   $[J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

### 2.1.9. Ladungsträger-Geschwindigkeit in einem Leiter



Es soll angenommen werden, dass sich die Ladungsträger in einem Leiterabschnitt der Länge  $s$  in der Zeit  $t$  um den resultierenden Weg  $s$  bewegt haben, siehe Bild EG219A. Einfacher ist es immer, die Bewegung von positiven Ladungsträgern zu betrachten. Die Bewegung der Elektronen ist entgegengesetzt zur Richtung der positiven Ladungsträger. Die Anzahl der Ladungsträger  $m$  in dem betrachteten Volumenelement aus Bild EG219A soll betrachtet werden.

Bild EG219A

Eine Materialeigenschaft ist die Anzahl der zur Verfügung stehenden freien Ladungsträger bezogen auf das Volumen:

n- Ladungsträgerdichte (Teilchen pro Volumen)

$$[n] = \frac{1}{\text{m}^3} = \frac{\text{Teilchen}}{\text{m}^3}$$

Die Anzahl der freien Ladungsträger m im Volumenabschnitt nach Bild EG219A ergibt sich aus der Multiplikation von Ladungsträgerdichte n und dem Volumen V:

$$m = n \cdot V = n \cdot A \cdot s$$

Bei den meisten Metallen gilt für die Ladungsträgerdichte der Näherungswert:

$$n \approx 10^{23} \text{ cm}^{-3} = 10^{20} \frac{1}{\text{mm}^3} = 10^{29} \frac{1}{\text{m}^3}$$

Die in der Zeit t transportierte Ladung Q ergibt sich aus der Multiplikation der Anzahl der Elektronen m und der Elementarladung q:

$$Q = m \cdot q = n \cdot A \cdot s \cdot q$$

Die Stromstärke ist als Ladung pro Zeit definiert:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{n \cdot A \cdot s \cdot q}{t} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (n \cdot A \cdot s \cdot q) = n \cdot A \cdot q \cdot \frac{ds}{dt}$$

Der Ausdruck ds/dt ist die resultierende Geschwindigkeit v. Somit ergibt sich die Stromstärke I:

$$I = n \cdot A \cdot v \cdot q$$

Die Stromdichte lässt sich aus Strom pro Fläche berechnen:

$$J = \frac{I}{A} = n \cdot v \cdot q$$

**Beispiel:** In einem Leiter der Querschnittsfläche  $A = 1 \text{ mm}^2$  fließt ein Strom von  $I = 10 \text{ A}$ . Wie groß ist die resultierende Driftgeschwindigkeit v der Elektronen ?

**Lösungsweg:**

$$n = 10^{23} \text{ cm}^3 = 10^{20} \text{ mm}^{-3}$$

$$v = \frac{I}{n \cdot A \cdot q} = \frac{10 \text{ A}}{10^{20} \frac{1}{\text{mm}^3} \cdot 1 \text{ mm}^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}$$

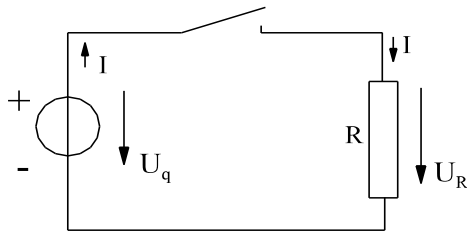
$$v = 0.625 \frac{\text{mm}}{\text{s}} = \frac{0.625 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 2.25 \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

Aus der oberen Berechnung des Zahlenwertes sind zwei Punkte anzumerken:

Bei zahlenwertmäßiger Berechnung physikalischer Gleichungen muss immer mit Einheiten gerechnet werden, denn eine physikalische Größe ist Zahlenwert mal Einheit. Das Ergebnis muss von der Einheit sein, die man erwartet, siehe oben. Dort ist die Einheit der Geschwindigkeit mm/s oder m/h korrekt.

Die obere resultierende Driftgeschwindigkeit in einem Leiter ist relativ langsam. Die Geschwindigkeit der Elektronen ist nicht zu vergleichen mit der Impulsgeschwindigkeit beim Einschalten (z.B. einer Lampe). Diese ist fast Lichtgeschwindigkeit.

### 2.1.10. Minimal-Stromkreis



Nach Bild EG2110A besteht ein Stromkreis mindestens aus:

- Spannungsquelle
- Widerstand und
- Schalter

Bild EG2110A: Minimal-Stromkreis

Im einfachen Fall, Bild EG2110A, sind bei passiven Elementen, hier am Widerstand R, Strom I und Spannung U in einer Richtung. Strom und Spannung sind am Verbraucher von Plus nach Minus gerichtet. Später wird gezeigt, dass damit eine Energieabnahme (Verbrauch ist physikalisch nicht richtig, wird aber oft benutzt) verbunden ist.

An der Spannungsquelle sind die Richtungen von Strom und Spannung unterschiedlich. Auch hier ist die Spannung von Plus nach Minus gerichtet. Der Strom fließt dagegen bei Energieabgabe von Minus nach Plus.

### 2.1.11. Wirkung des elektrischen Stromes

#### Wärmewirkung:

Nach einer vereinfachten Theorie wird die Wärmewirkung durch Reibung der Elektronen am Gitter hervorgerufen. Die Festkörperphysik erklärt die Wärmewirkung als Energieaustausch, verursacht durch Stöße am Kristallgitter. Anwendung: Heizgeräte, Industrieöfen. Abfall: In jedem ohmschen Widerstand treten bei Stromfluss Verlustwärme auf.

#### Magnetische Wirkung:

1. **Die Bewegung von Ladungsträgern (Strom) verursacht ein Magnetfeld.** Magnetfelder lassen sich entweder mit Hilfe von Dauermagneten oder mit Hilfe elektrischer Ströme erzeugen.
2. Die Bewegung von Ladungsträgern im Magnetfeld bewirkt eine Kraft. Somit erfährt ein stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld eine **Kraftwirkung**. Da bewegte Ladungsträger eine Kraft erfahren, lässt sich die magnetische Wirkung auch zur Ladungsträgerbewegung nutzen, z.B. zur Erzeugung von Elektronenmangel und -häufung. Die Folge: Eine induzierte Spannung aufgrund magnetischer Wirkung ruft die **Induktionswirkung** hervor. Anwendung: Motoren, Generatoren, Transformatoren und Messgeräte.

#### Chemische Wirkung:

Bei einem Stromfluss im Elektrolyten erfolgt ein Massentransport (Bewegung von Ionen) zwischen den Elektroden. Aufgrund unterschiedlicher Lösbarkeit der Metalle im Elektrolyten (siehe Abschnitt 5.4) ergibt sich außerdem eine chemische Spannungsquelle. Anwendung: Zerlegung von Stoffen (z.B.  $H_2O$ ), Laden und Entladen von Akkus, Batterien, Elektrolyse (Gewinnung chemisch reiner Stoffe).

#### Lichtwirkung:

Die Lichtwirkung basiert auf der Energieabgabe in Form eines Lichtquants. Bei einem Übergang von einem Zustand (Elektronenradius) eines Atoms zu einem anderem tritt eine Energiedifferenz auf, die in Form eines Lichtquants abgegeben wird. Durch Energieanregung wurde das Atom vorher auf ein höheres Energieniveau gebracht. Diese Energieanregung kann auf zwei Arten erfolgen: Bei der Glühlampe wird die Energie in Form von Wärme zugeführt. Bei Gasentladungslampen und Leuchtdioden erfolgt die Energiezufuhr direkt durch den elektrischen Strom.

#### Elektrostatische Wirkung:

Zwei elektrische Ladungen erfahren (je nach Vorzeichen) eine gegenseitige Anziehung oder Abstoßung. Außerdem verursacht eine Ladung ein elektrisches Feld. Anwendung: Elektrostatistisches Messwerk, Hochspannungs-Rauchgas-Filter und Kondensatoren.

#### Piezo-Effekt:

Durch Druck auf Kristalle erfolgt eine Ladungsträgerschiebung. Der Effekt ist auch umkehrbar. Der Piezo-Effekt tritt nur bei dynamischen Veränderungen ( $d/dt \neq 0$ ) auf. Anwendung: Beschleunigungsaufnehmer, Spannungsquellen (Impulse) zum Zünden von Flammen und Schwingquarze.

## 2.1.12. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.1

**Beispiel 1:** Ein dotierter Halbleiter mit der Ladungsträgerkonzentration  $n = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  soll eine Stromdichte von  $J = 150 \text{ mA/mm}^2$  aufweisen. Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit  $v$  der Elektronen?

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $n = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$   
 $J = 150 \text{ mA/mm}^2$

**gesucht:**  $v$

$$J = n \cdot v \cdot q$$

$$v = \frac{J}{n \cdot q} = \frac{150 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{10^{-6} \text{ m}^2}}{10^{16} \frac{1}{10^{-6} \text{ m}^3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 93.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Beispiel 2:** Ein Kondensator soll mit einer Ladung  $Q = 40 \cdot 10^{-3} \text{ As}$  aufgeladen werden. Die Ladung erfolgt über einen Metalldraht von  $d = 0.1 \text{ mm}$  Durchmesser mit Hilfe einer Konstantstromquelle, die  $t = 2 \text{ s}$  eingeschaltet werden soll.

- Wie groß ist der Stromstärke  $I$ ?
- Berechnen Sie die Stromdichte  $J$ .
- Zu bestimmen ist die Driftgeschwindigkeit  $v$  der Elektronen.
- Wie viel Elektronen sind auf den Platten des Kondensators verschoben?

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $Q = 40 \cdot 10^{-3} \text{ As}$   
 $n = 10^{23} \text{ cm}^{-3}$  (Draht)  
 $d = 0.1 \text{ mm}$   
 $t = 2 \text{ s}$

**gesucht:** a)  $I$   
 b)  $J$   
 c)  $v$   
 d)  $m$

$$\text{a) } I = \frac{Q}{t} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \text{ As}}{2 \text{ s}} = 20 \text{ mA}$$

$$\text{b) } J = \frac{I}{A} = \frac{I}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{\pi \cdot (0.1 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 2.546 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = 2.546 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$


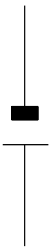
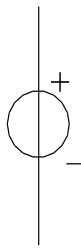
$$\text{c) } v = \frac{J}{n \cdot q} = \frac{2.546 \frac{\text{A}}{10^{-6} \text{ m}^2}}{10^{23} \frac{1}{10^{-6} \text{ m}^3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 0.159 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.159 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

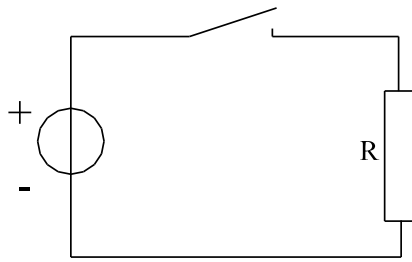
$$\text{d) } m = \frac{Q}{q} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \text{ As}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 2.5 \cdot 10^{17}$$

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch	
AF.2.1.A	Strom ist die Bewegung von Ladungsträgern.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Strom ist die <b>geordnete</b> Bewegung von Ladungsträgern.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Spannung basiert auf der Trennung von Ladungsträgern.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Spannung basiert auf der Spaltung von Ladungsträgern.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Die Trennung von Ladungsträgern bewirkt in jedem Fall einen Strom.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Spannung ist die Bewegung von Ladungsträgern	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Spannung ist die geordnete Bewegung von Ladungsträgern.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
AF.2.1.B	An der Steckdose ist auch ohne Stecker vorhanden:	* Strom	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Spannung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.C	Zuerst wurde die Bewegung von Ladungsträgern beobachtet	* in metallischen Leitern	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* in einem Elektrolyten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.D	Strom kann fließen in	* metallischen Leitern	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Elektrolyten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* idealen Isolatoren	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.E	Die technische Stromrichtung ist die Bewegungsrichtung:	* der negativen Ladungsträger	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* der positiven Ladungsträger	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.F	Der Wert der Ladung kann	* positiv sein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* negativ sein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* nur ganze Vielfache der Elementarladung q betragen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* jeden Wert annehmen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.G	Ein Elektron kann	* eine positive Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* eine negative Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* keine Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.H	Ein Proton kann	* eine positive Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* eine negative Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* keine Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.I	Ein Neutron kann	* eine positive Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* eine negative Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* keine Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.J	Ein Ion kann	* eine positive Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* eine negative Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* keine Ladung aufweisen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.K	Der Wert der Elementarladung q beträgt:	* $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* $q = 0.7 \cdot 10^5 \text{ As}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* $q = 1.9 \cdot 10^{-29} \text{ As}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.L	Die Anzahl der Ladungsträger in Metallen beträgt etwa:	* $10^{20} \text{ mm}^{-3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* $10^{23} \text{ cm}^{-3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* $10^{12} \text{ cm}^{-3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* $10^{29} \text{ m}^{-3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* $10^{24} \text{ mm}^{-2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.M	Die <b>unmittelbare</b> Ursache einer Spannungsquelle kann begingt sein durch:	* Lorentzkraft, Magnetismus, Induktion	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Kernspaltung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Chemische Ursache	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Verbrennung im Kessel	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Wärme, Thermoelement	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Druck, Piezo-Effekt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Wasserkraft	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Lichteinstrahlung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.2.1.N	Die Stromstärke I ist eine SI-Einheit und wird über die Kraftwirkung definiert.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	Der Strom I ist keine SI-Einheit und wird über die Anzahl der Ladungsträger pro Zeit als physikalische Größe definiert.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.O	Der Strom ist die zeitliche Ableitung der bewegten Ladung.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	Die Ladung ist das Integral der Stromstärke.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	Die Ladung ist die Ableitung der Stromstärke	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.P	Der Strom kann <b>unmittelbar</b> folgende Wirkungen haben:		
	* Wärme	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Kernspaltung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Schall	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Licht	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Kraft im Magnetfeld	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.Q	Die magnetische Wirkung des Stromes basiert auf der		
	* Anziehung / Abstoßung von elektrischen Ladungen * Bewegungen von Ladungsträgern im Magnetfeld	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.2.1.R	Die Stromdichte ist definiert als:		
	* Strom pro Länge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Strom pro Fläche * Strom pro Volumen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.2.1.S	Die Wärmewirkung des Stromes basiert auf:		
	* der Reibung der Elektronen am Gitter * dem Energieaustausch durch Stöße der Elektronen in Gitter	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.2.1.T	In einem metallischen Leiter ist bei Stromfluss die resultierende Geschwindigkeit der Elektronen wesentlich		
	* kleiner als die thermische Geschwindigkeit der Elektronen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* größer als die thermische Geschwindigkeit der Elektronen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.1.U	Bei gleicher Stromstärke ist die resultierende Ladungsträgergeschwindigkeit größer		
	* im Metall * im Halbleiter	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.2.1.V	Grund/Gründe für die größere Ladungsträgergeschwindigkeit im Halbleiter ist/sind		
	* die kleinere Ladungsträgerdichte im Halbleiter	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* die größere Beweglichkeit im Metall * die größeren Gitterschwingungen im Metall	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

<b>Frage 2.1.A</b> Was ist die Ursache des elektrischen Stromes ? _____
<b>Frage 2.1.B</b> Was ist die Ursache der elektrischen Spannung ? _____
<b>Frage 2.1.C</b> An der Steckdose ist auch ohne Stecker vorhanden: _____
<b>Frage 2.1.D</b> Die technische Stromrichtung ist die Bewegungsrichtung _____
<b>Frage 2.1.E</b> Das Vorzeichen der Ladung eines Elektrons ist _____
<b>Frage 2.1.F</b> Das Vorzeichen der Ladung eines Protons ist _____

<b>Frage 2.1.G</b> Das Vorzeichen der Ladung eines Neutrons ist _____
<b>Frage 2.1.H</b> Das Vorzeichen der Ladung eines Ions ist _____
<b>Frage 2.1.I</b> Der Wert der Elementarladung $q$ beträgt _____
<b>Frage 2.1.J</b> Die Anzahl der Ladungsträger in Metallen beträgt etwa _____
<b>Frage 2.1.K</b> Die <b>unmittelbare</b> Ursache einer Spannungsquelle kann bedingt sein durch: _____ _____ _____
<b>Frage 2.1.L</b> Der Strom kann <b>unmittelbar</b> folgende Wirkungen haben: _____ _____ _____
<b>Frage 2.1.M</b> Die magnetische Wirkung des Stromes basiert auf der _____
<b>Frage 2.1.N</b> Die Stromdichte ist definiert als: _____
<b>Frage 2.1.O</b> Die Wärmewirkung des Stromes basiert auf: _____
<b>Frage 2.1.P</b> Grund für die kleinere Ladungsträrgeschwindigkeit im Metall gegenüber dem Halbleiter ist: _____
<b>Frage 2.1.Q</b> Zeichnen Sie das ESB einer Spannungsquelle nach neuer Norm
<b>Frage 2.1.R</b> Zeichnen Sie das ESB einer Spannungsquelle nach alter Norm
<b>Frage 2.1.S</b> a)  b)  c)  Zeichnen Sie jeweils die Spannungsrichtungen ein.

**Frage 2.1.T**

Zeichnen Sie die Strom- und Spannungsrichtungen ein.

**Frage 2.1.U** Wie lautet der Zusammenhang zwischen Strom und Stromdichte?

\_\_\_\_\_

**Frage 2.1.V** Wie lautet der Zusammenhang zwischen Strom und Ladung?

\_\_\_\_\_

**Aufgabe 2.1.A**

In einem Leiter mit dem Durchmesser  $d = 0.15 \text{ mm}$  fließen in einer Zeit von  $t = 35 \text{ } \mu\text{s}$  eine Anzahl von  $m = 3.06 \cdot 10^{10}$  Elektronen.

- Welche Ladung  $Q$  wird in der Zeit  $t$  transportiert?
- Wie groß ist die Stromstärke  $I$ ?
- Berechnen Sie die Stromdichte  $J$ .

**Aufgabe 2.1.B**

Der nicht dotierte Halbleiter Silizium hat bei Raumtemperatur eine Dichte von  $n = 7.6 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$  freien Elektronen zur Eigenleitung zur Verfügung. Wie groß ist bei einer Stromdichte von  $J = 10 \text{ } \mu\text{A/mm}^2$  die Drift-Geschwindigkeit der Elektronen  $v$  ?

**Aufgabe 2.1.C**

Ein Kondensator soll mit einer Ladung  $Q = 25 \cdot 10^{-3} \text{ As}$  aufgeladen werden. Die Ladung erfolgt über einen Metalldraht von  $d = 0.3 \text{ mm}$  Durchmesser mit Hilfe einer Konstantstromquelle, die  $t = 50 \text{ ms}$  eingeschaltet werden soll.

- Wie groß ist der Stromstärke  $I$ ?
- Berechnen Sie die Stromdichte  $J$ .
- Zu bestimmen ist die Driftgeschwindigkeit  $v$  der Elektronen.
- Wie viel Elektronen sind auf den Platten des Kondensators verschoben?



## 2.2. Ohmsches Gesetz

Die meisten physikalischen Formeln sind nach Beobachtungen bei Versuchen entwickelt worden. D.h. ein physikalischer Effekt wurde beobachtet und gemessen. Um das Messergebnis zu interpretieren, wurde eine physikalische Theorie mit Formeln entwickelt, so auch beim ohmschen Gesetz. Im Rahmen dieser Vorlesung sollen keine Versuche durchgeführt werden, wohl aber verbal beschrieben.

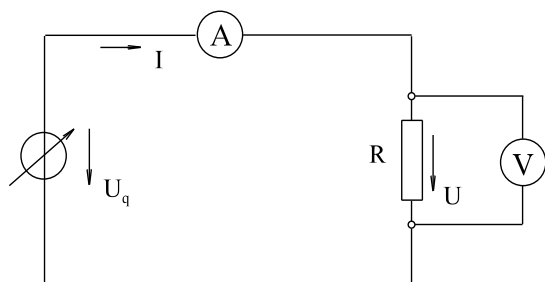


Bild EG22A: Versuch 2.1

Führt man den Versuch nach Bild EG22A durch und misst Strom und Spannung an einem Widerstand, ergeben sich zugehörige Wertepaare von Strom und Spannung. Diese Wertepaare grafisch dargestellt, ergibt die Messpunkte in Bild EG22B.

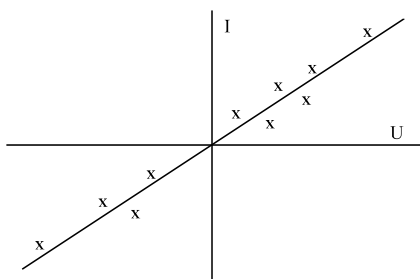


Bild EG22B: Messergebnis Versuch 2.1

Die Messwerte in Bild EG22B können recht gut mit Hilfe einer Geraden angepasst werden. Diese Gerade geht durch den Nullpunkt. Mathematisch sind  $U$  und  $I$  einander proportional:

$$U \sim I$$

Dieses kann auch mit Hilfe einer Proportionalitäts-Konstanten angegeben werden:

$$U = c \cdot I$$

Wie wird nun die Proportionalitäts-Konstanten  $c$  genannt? Das ist der Widerstand  $R$ , der auch in Bild EG22A eingetragen werden kann. **Damit ergibt sich das bekannte ohmsche Gesetz:**

$$U = R \cdot I$$

Normalerweise reicht es aus, eine Formel in nur einer Form auswendig zu lernen, wenn überhaupt. Nur wichtige Formeln behält man im Kopf. Formeln sieht man nach und stellt sie um oder leitet die Formel her. Anders beim ohmschen Gesetz, dieses sollte in allen drei Formen bekannt sein:

$U = I \cdot R$	$I = \frac{U}{R}$	$R = \frac{U}{I}$
-----------------	-------------------	-------------------

### Einheit von $R$

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} = \Omega$$

Definition

Die Einheit des Widerstandes ist  $V/A$  und wird als abgeleitete SI-Einheit  $\Omega$  (Ohm) definiert.

**Definition des Leitwertes**

Der Kehrwert des Widerstandes  $R$  wird als Leitwert mit dem Formelbuchstaben  $G$  definiert:

Definition:

$$G = \frac{1}{R}$$

Einheit:

$$[G] = \frac{1}{\Omega} = \frac{A}{V}$$

Einheiten-Definition:

$$\frac{1}{\Omega} = S$$

Siemens

**Ohmsches Gesetz mit Leitwerten:**

$U = \frac{I}{G}$	$I = U \cdot G$	$G = \frac{I}{U}$
-------------------	-----------------	-------------------

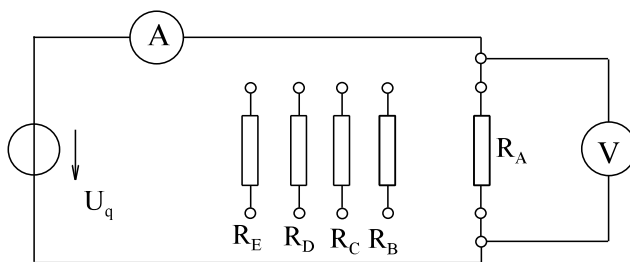
**2.2.1. Formabhängigkeit des Widerstandes**

Bild EG221A: Versuch 2.2: Formabhängigkeit des Widerstandes eines Cu-Drahtes

Um den Widerstandswert bei einfachen Geometrien zu berechnen, wird der Versuch 2.2 durchgeführt, mit fünf verschiedenen Draht-Widerständen. Einmal wird die Drahtlänge und einmal der Draht-Durchmesser verändert, siehe Bild EG221A und Tabelle EG221A. Nach Tabelle EG221A wird neben der Ausgangs-Länge  $l_0$  auch der Ausgangsdurchmesser  $d_0$  auf das zwei und dreifache Maß erhöht und der Widerstandswert gemessen. Damit soll festgestellt werden, ob eine lineare oder eine andere Abhängigkeit des Widerstandes von den variierten Größen vorhanden ist.

	<b>l</b>	<b>d</b>	<b>R</b>
<b>A</b>	$l_0 = 100 \text{ m}$	$d_0 = 0.1 \text{ mm}$	$R_0 = 227 \Omega$
<b>B</b>	$2l_0 = 200 \text{ m}$	$d_0 = 0.1 \text{ mm}$	$2R_0 = 455 \Omega$
<b>C</b>	$3l_0 = 300 \text{ m}$	$d_0 = 0.1 \text{ mm}$	$3R_0 = 682 \Omega$
<b>D</b>	$l_0 = 100 \text{ m}$	$2d_0 = 0.2 \text{ mm}$	$R_0/4 = 57 \Omega$
<b>E</b>	$l_0 = 100 \text{ m}$	$3d_0 = 0.3 \text{ mm}$	$R_0/9 = 25 \Omega$

Tabelle EG221A: Messergebnisse Versuch 2.2

**Ergebnis:** Mit der Länge steigt auch der Widerstand proportional an. Mit dem Durchmesser nimmt der Widerstand quadratisch ab:

$$R \approx \frac{l}{d^2}$$

Was ist proportional  $d^2$ ? Antwort: die Querschnittsfläche:  $A \sim d^2$

Somit ist R von der Länge proportional abhängig und von der Querschnittsfläche umgekehrt proportional:

$$R \approx \frac{l}{A}$$

Einführung eines Proportionalitäts-Faktors:  $R = c * \frac{l}{A}$

Der Proportionalitäts-Faktors wird in diesem Fall **spezifischer Widerstand**  $\rho$  genannt:

$$R = \rho * \frac{l}{A}$$

Aus den Messwerten der Tabelle EG221A ergibt sich aus allen fünf Messwerten das gleiche Ergebnis für Kupfer:

$$\rho = \frac{R * A}{l} = \frac{R * d^2 * \pi}{4 * l} = \frac{227 \Omega * (0.1 \text{ mm})^2 * \pi}{4 * 100 \text{ m}}$$

$$\rho = 0.018 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} = 0.018 \frac{\Omega * 10^{-6} \text{ m}^2}{\text{m}} = 0.018 * 10^{-6} \Omega \text{ m}$$

**Einheit des spezifischen Widerstandes:**

$$[\rho] = \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$$

üblich

$$[\rho] = \Omega \text{ m}$$

auch üblich

In analoger Weise zur Kombination Widerstand/Leitwert wird auch hier den Kehrwert des spezifischen Widerstandes definiert:

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

- **spezifische Leitfähigkeit** ( $\sigma$  bei Physikern)

$$[\kappa] = \frac{1}{[\rho]} = \frac{1}{\Omega \text{ m}} = \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$$

$$[\kappa] = \frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2}$$

auch üblich

Spezielle Werte der spezifischen Leitfähigkeit und des spezifischen Widerstandes werden in Kap. 2.2.3. angegeben.

Die Widerstands-Berechnung ist somit auch mit Hilfe der Leitfähigkeit möglich:

$$R = \frac{l}{\kappa * A}$$

## 2.2.2. Temperaturabhängigkeit von Widerständen

Um den Einfluss der Temperatur auf den Widerstand zu untersuchen, wird Versuch 2.3 durchgeführt. Dabei sind drei verschiedene Widerstände vorhanden, die alle bei  $\vartheta = 20\text{ °C}$  den gleichen Widerstandswert aufweisen. Mit Hilfe eines Bunsenbrenners werden die Widerstände erhitzt, siehe Bild EG222A. Das Ergebnis der Widerstandsveränderung ist in Bild EG222B dargestellt.

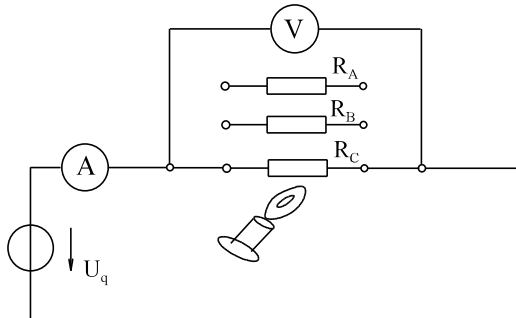


Bild EG222A: Versuch 2.3

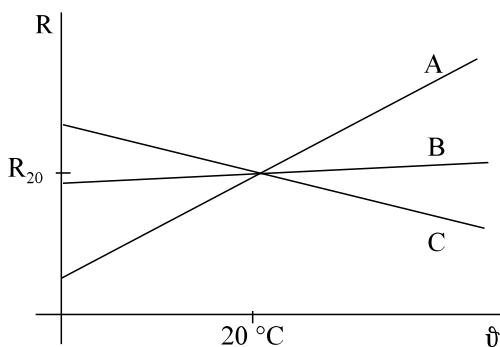


Bild EG222B: Ergebnis, Versuch 2.3

### Interpretation des Ergebnisses:

Die drei Widerstände haben unterschiedliches Temperaturverhalten. Im Fall A steigt der Widerstand mit der Temperatur, während bei Fall C der Widerstand mit der Temperatur sinkt. Bei Fall B ist ein Widerstand mit einem geringen Temperatureinfluss vorhanden.

#### Fall A: PTC - Positiver Temperatur Coeffizient

Ursache: Größere Gitterschwingungen infolge höherer Temperatur verursachen bei Metallen mehrere Stöße zwischen Elektronen und Atomen. Dieses bedingt einen größeren Spannungsabfall und somit einen größeren Widerstand, z. B. bei Metallen.

**Fall C:** Bei Halbleitern stehen mit zunehmender Temperatur mehrere freie Elektronen zur Verfügung. Mehr freie Elektronen bedeuten höhere Leitfähigkeit und somit einen geringeren Widerstand.

**Fall B:** Spezial-Legierung um den Einfluss der Temperatur gering zu halten.

Auch Glas wäre ein Leiter. Spannt man einen Glasstab zwischen zwei Elektroden und erhitzt das Glas, stellt sich ein elektrischer Strom ein.

Die einfachste mathematische Annäherung des Temperaturverlaufs nach Bild EG222B erfolgt durch eine Gerade:

$$R(\vartheta) = R_{20} + \alpha \cdot (\vartheta - 20\text{ °C}) \cdot R_{20}$$

$$R(\vartheta) = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (\vartheta - 20\text{ °C})]$$

$\alpha$  ist der Temperaturbeiwert. Im Normalfall werden die Materialwerte  $\rho$ ,  $\kappa$  und  $\alpha$  für die Temperatur  $\vartheta = 20\text{ °C}$  angegeben. Oftmals werden diese dann auch als  $\rho_{20}$ ,  $\kappa_{20}$  und  $\alpha_{20}$  bezeichnet.

$$[\alpha] = \frac{1}{^{\circ}\text{C}} = \frac{1}{\text{K}}$$

Eine bessere Anpassung ergibt sich durch eine Parabel:

$$R(\vartheta) = R_{20} * [1 + \alpha * (\vartheta - 20^{\circ}\text{C}) + \beta * (\vartheta - 20^{\circ}\text{C})^2]$$

Die zweite Form der Annäherung (Parabel) ist für größere Temperaturabweichungen als 100 °C zu verwenden.

Wie für den Widerstand ergibt sich die gleiche Temperaturabhängigkeit auch für den spezifischen Widerstand, weil sich die geometrischen Daten um etwa zwei Zehnerpotenzen geringer verändern.

$$\rho(\vartheta) = \rho_{20} * [1 + \alpha * (\vartheta - 20^{\circ}\text{C}) + \beta * (\vartheta - 20^{\circ}\text{C})^2]$$

Bei kleineren Temperaturdifferenzen kann  $\beta$  vernachlässigt werden.

**Faustregel:** Bei vielen Metallen nimmt der Widerstand bei 10 °C Temperaturerhöhung um etwa 4% zu.

**Beweis:**  $\Delta\vartheta = 10^{\circ}\text{C} \Delta\rho = \rho_{20} * \alpha * \Delta\vartheta$

$$\Delta\rho/\rho_{20} = \alpha * \Delta\vartheta = 0.004^{\circ}\text{C}^{-1} * 10^{\circ}\text{C} = 0.04 \triangleq 4\%$$

### 2.2.3. Material-Werte

Material	$\frac{\rho_{20}}{\frac{\text{mm}^2 \Omega}{\text{m}}}$	$\frac{\kappa_{20}}{\frac{\text{m}}{\Omega \text{mm}^2}}$	$\frac{\alpha_{20}}{\frac{1}{^{\circ}\text{C}}}$	$\frac{\beta_{20}}{\frac{1}{^{\circ}\text{C}^2}}$
Silber	0.016	63	0.0038	$0.7 * 10^{-6}$
Kupfer	0.018	56	0.0039	$0.6 * 10^{-6}$
Alu	0.0286	35	0.0038	$\approx 0.6 * 10^{-6}$
Stahl	0.1...0.5	2...10	$\approx 0.0052$	
Konstantan	0.43	2.3	$10^{-5}$	
Wolfram	0.055	18	0.0041	$10^{-6}$
Kohle	6...80	0.01...0.2	-0.003...-0.008	

**Tabelle 2.2:** Materialwerte ausgewählter Stoffe bei  $\vartheta = 20^{\circ}\text{C}$

## 2.2.4. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.2

**Beispiel 1:**

Eine Glühlampe mit einer Wolframwendel nimmt im Betrieb bei  $\vartheta = 2200\text{ °C}$  einen Strom von  $I = 0.5\text{ A}$  bei einer Spannung von  $U = 230\text{ V}$  auf. Wie groß ist der Einschaltstrom bei  $\vartheta = 40\text{ °C}$  ?

**Lösungsweg:**

**gegeben:** Wolfram-Wendel  $\alpha = 0.0041\text{ °C}^{-1}$   $\beta = 10^{-6}\text{ °C}^{-2}$   
 $\vartheta = 2200\text{ °C}$   $I = 0.5\text{ A}$   $U = 230\text{ V}$

**gesucht:**  $I_{40}$  bei  $\vartheta = 40\text{ °C}$

$$R_{2200} = R_{20}[1 + \alpha(\vartheta_{2200} - 20\text{ °C}) + \beta(\vartheta_{2200} - 20\text{ °C})^2]$$

$$R_{40} = R_{20}[1 + \alpha(\vartheta_{40} - 20\text{ °C}) + \beta(\vartheta_{40} - 20\text{ °C})^2]$$

$$\frac{R_{40}}{R_{2200}} = \frac{1 + \alpha(\vartheta_{40} - 20\text{ °C}) + \beta(\vartheta_{40} - 20\text{ °C})^2}{1 + \alpha(\vartheta_{2200} - 20\text{ °C}) + \beta(\vartheta_{2200} - 20\text{ °C})^2}$$

$$R_{2200} = \frac{U}{I} = \frac{230\text{ V}}{0.5\text{ A}} = 460\Omega$$

$$R_{40} = 460\Omega \frac{1 + 0.0041\text{ °C}^{-1}(40\text{ °C} - 20\text{ °C}) + 10^{-6}\text{ °C}^{-2}(40\text{ °C} - 20\text{ °C})^2}{1 + 0.0041\text{ °C}^{-1}(2200\text{ °C} - 20\text{ °C}) + 10^{-6}\text{ °C}^{-2}(2200\text{ °C} - 20\text{ °C})^2}$$

$$R_{40} = 460\Omega \frac{1 + 0.082 + 0.0004}{1 + 8.938 + 4.7524} = 460\Omega \frac{1.082}{14.46} = 33.88\Omega$$

$$I_{40} = \frac{U}{R_{40}} = \frac{230\text{ V}}{33.88\Omega} = 6.79\text{ A}$$

**Achtung:** Der Einschaltstrom ist sehr viel größer als der Betriebsstrom!

**Hinweis:** Bei kleinen Temperaturdifferenzen hat der quadratische Term keine große Auswirkung.

**Beispiel 2:**

Eine Spule aus Cu-Draht mit  $N = 2000$  Windungen,  $D = 5\text{ cm}$  mittleren Wicklungsdurchmesser,  $d = 0.15\text{ mm}$  Drahtdurchmesser liegt bei  $\vartheta = 110\text{ °C}$  an einer Spannung von  $U = 10\text{ V}$ . Wie groß ist der Strom  $I_{110}$  bei  $\vartheta = 110\text{ °C}$  ?

**Lösungsweg:**

**gegeben:** Cu-Draht  $\kappa = 56\text{ m}\Omega^{-1}\text{ mm}^{-2}$   $\alpha = 0.0039\text{ °C}^{-1}$   
 $N = 2000$  Windungen  $D = 5\text{ cm}$  Wicklungsdurchmesser  
 $d = 0.15\text{ mm}$  Drahtdurchmesser  $U = 10\text{ V}$   
 $\vartheta = 110\text{ °C}$

**gesucht:**  $I_{110}$  bei  $\vartheta = 110\text{ °C}$

$$R_{20} = \frac{1}{\kappa \cdot A} = \frac{N \cdot \pi \cdot D}{\kappa \cdot d^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{4N \cdot D}{\kappa \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 2000 \cdot 5 \cdot 10^{-2}\text{ m}}{56 \frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2} \cdot (0.15\text{ mm})^2} = 317.5\Omega$$

$$R_{110} = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (110\text{ °C} - 20\text{ °C})] = 317.5\Omega [1 + 0.0039\text{ °C}^{-1} \cdot 90\text{ °C}] = 428.9\Omega$$

$$I_{110} = \frac{U}{R_{110}} = \frac{10\text{ V}}{428.9\Omega} = 23.3 \cdot 10^{-3}\text{ A} = 23.3\text{ mA}$$

Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
<b>AF.2.2.A</b>	Das Ohmsche Gesetz ist mathematisch: * eine Gerade durch Null der Funktion $U = f(I)$ der Steigung R * eine Gerade durch Null der Funktion $I = f(U)$ der Steigung R * eine Gerade durch Null der Funktion $U = f(I)$ der Steigung $1/R$ * eine Gerade durch Null der Funktion $I = f(U)$ der Steigung $1/R$ * eine Gerade durch Null der Funktion $R = f(I)$ * eine Gerade nicht durch Null der Funktion $U = f(I)$ der Steigung R * eine Gerade nicht durch Null der Funktion $I = f(U)$ der Steigung R * eine Gerade nicht durch Null der Funktion $U = f(I)$ der Steigung $1/R$ * eine Gerade nicht durch Null der Funktion $I = f(U)$ der Steigung $1/R$ * eine Parabel der Funktion $I = f(U)$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.2.B</b>	Der elektrische Widerstand von * Metallen erhöht sich mit der Temperatur * Metallen verringert sich mit der Temperatur * Halbleitern verringert sich mit der Temperatur * Halbleitern erhöht sich mit der Temperatur	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.2.C</b>	Der Grund für die Erhöhung des Widerstandes mit der Temperatur ist die: * erhöhte Gitterschwingung mit der Temperatur * Erhöhung der Anzahl der Ladungsträger mit der Temperatur	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.2.D</b>	Der Grund für die Verringerung des Widerstandes mit der Temperatur ist: * erhöhte Gitterschwingung mit der Temperatur * Erhöhung der Anzahl der Ladungsträger mit der Temperatur	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.2.E</b>	Eine Faustformel sagt aus, der Widerstand von Metallen * steigt bei $10C^\circ$ Erhöhung der Temperatur um etwa 40 % * steigt bei $10C^\circ$ Erhöhung der Temperatur um etwa 4 % * sinkt bei $10C^\circ$ Erhöhung der Temperatur um etwa 0.4 % * sinkt bei $10C^\circ$ Erhöhung der Temperatur etwa um 4 %	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Wie lautet das ohmsche Gesetz in den drei umgestellten Formen.	
<b>Frage 2.2.A</b>	_____
<b>Frage 2.2.B</b>	Geben Sie den Zusammenhang zwischen Leitwert und Widerstand an. _____
<b>Frage 2.2.C</b>	Wie lauten die drei Formen des ohmsche Gesetzes mit Leitwerten? _____
<b>Frage 2.2.D</b>	Wie lautet die Formel für den Widerstand $R = f(\alpha, l, A)$ _____ $R = f(\rho, l, A)$ _____
<b>Frage 2.2.E</b>	Wie lautet die Formel für die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes $R = f(R_{20}, \vartheta, \alpha)$ _____ $R = f(R_{20}, \vartheta, \alpha, \beta)$ _____ Was bedeutet darin $R_{20}$ ? _____
<b>Frage 2.2.F</b>	Geben Sie Formelbuchstabe und Einheit in V, A, s und K und evtl. abgeleitete SI-Einheit der folgenden physikalischen Größen an: elektrischer Widerstand _____ elektrischer Leitwert _____ spezifischer Widerstand _____ spezifische Leitfähigkeit _____ Temperaturbeiwert _____

**Frage 2.2.G** Um wie viel Prozent steigt der elektrische Widerstand der meisten Metalle bei 10 °C Temperaturerhöhung?  
\_\_\_\_\_

**Frage 2.2.H** Welches Vorzeichen hat der Temperaturbeiwert

bei Metallen \_\_\_\_\_

bei Halbleitern \_\_\_\_\_

**Aufgabe 2.2.A**

Geben Sie die fehlende Größe an:

- |    |                               |                          |       |
|----|-------------------------------|--------------------------|-------|
| a) | $U = 100 \text{ V}$           | $R = 20 \text{ } \Omega$ | $I =$ |
| b) | $U = 10 \text{ V}$            | $I = 2 \text{ A}$        | $R =$ |
| c) | $I = 3 \text{ A}$             | $R = 20 \text{ } \Omega$ | $U =$ |
| d) | $U = 20 \text{ V}$            | $G = 2 \text{ S}$        | $I =$ |
| e) | $U = 40 \text{ V}$            | $I = 60 \text{ A}$       | $G =$ |
| f) | $I = 2 \text{ A}$             | $G = 0.1 \text{ S}$      | $U =$ |
| g) | $U = 20 \text{ kV}$           | $R = 5 \text{ M}\Omega$  | $I =$ |
| h) | $U = 10 \text{ } \mu\text{V}$ | $I = 2 \text{ nA}$       | $R =$ |
| i) | $I = 5 \text{ kA}$            | $R = 6 \text{ m}\Omega$  | $U =$ |

**Aufgabe 2.2.B**

Welche Spannung  $U$  liegt an der einer Cu-Spule mit  $l = 20 \text{ m}$  langen Draht bei einem Querschnitt von  $A = 0.05 \text{ mm}^2$  wenn bei einer Temperatur von  $\vartheta = 60^\circ\text{C}$  eine Stromstärke von  $I = 800 \text{ mA}$  gemessen wird?  
( $\alpha_{\text{Cu}} = 56 \text{ m}\Omega^{-1} \text{ mm}^{-2}$ ,  $\alpha_{\text{Cu}} = 0.0039 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )

**Aufgabe 2.2.C**

Eine Glühlampe mit einer Wolfram-Wendel hat im Nennbetrieb bei  $U_N = 230 \text{ V}$  eine Stromaufnahme von  $I_N = 0.25 \text{ A}$  bei  $\vartheta_N = 2200 \text{ }^\circ\text{C}$ . Weil die Spannung auf  $U = 130 \text{ V}$  absinkt, stellt sich eine Temperatur der Wendel von  $\vartheta = 1800 \text{ }^\circ\text{C}$  ein. Wie groß ist der Strom  $I$ ?

**Aufgabe 2.2.D**

Eine elektrische Maschine enthält zur Temperatur-Messung eine Spule von  $l = 250 \text{ m}$  und  $d = 0.2 \text{ mm}$  aus Kupfer. Bei einer Spannung von  $U = 10 \text{ V}$  wird ein Strom von  $55 \text{ mA}$  gemessen. Wie groß ist die Temperatur  $\vartheta$  der Spule?

**Aufgabe 2.2.E**

Der Widerstand eines Leiters wird bei zwei verschiedenen Temperaturen gemessen:

$$\vartheta = 40 \text{ }^\circ\text{C} \quad R_{40} = 55 \text{ } \Omega$$

$$\vartheta = 80 \text{ }^\circ\text{C} \quad R_{80} = 65 \text{ } \Omega$$

Wie groß ist der Widerstand bei:

$$\vartheta = 100 \text{ }^\circ\text{C} \quad R_{100} = ?$$

Der Widerstand  $R_{100}$  und der Temperaturbeiwert  $\alpha$  sind dabei zu bestimmen.

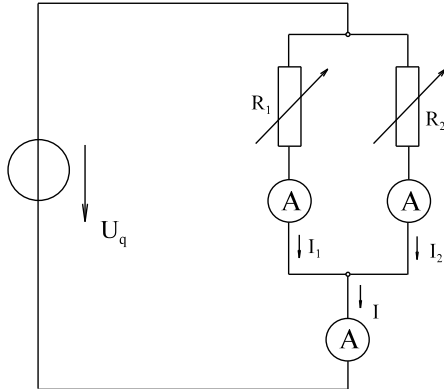


## 2.3. Kirchhoffsche Regeln

Die Kirchhoffschen Gesetze sind Aussagen über Strom- und Spannungssummen.

### 2.3.1. Erstes Kirchhoffsche Gesetz

Um das erste Kirchhoffsche Gesetz zu erläutern, wird Versuch 2.4 durchgeführt, siehe Bild EG231A.



$$\text{Ergebnis: } I = I_1 + I_2$$

Bei der oberen Anordnung werden die parallelen Ströme  $I_1$  und  $I_2$  gemessen und mit dem Strom  $I$  verglichen. Es ergibt sich, dass  $I$  immer die Summe von  $I_1$  und  $I_2$  ist.

Bild EG231A: Versuch 2.4

#### Physikalische Erklärung:

Der Strom ist durch die Anzahl der Elektronen pro Zeit bestimmt. Die Elektronen können sich hier nur im Leiter bewegen. Fließen diese parallel zusammen, addiert sich die Anzahl der Elektronen und somit auch der Strom.

#### Erstes Kirchhoffsche Gesetz:

(Form A)

Die Summe der reinfließenden Ströme in einem Knotenpunkt ist gleich der Summe der rausfließenden Ströme, siehe Bild EG231B.

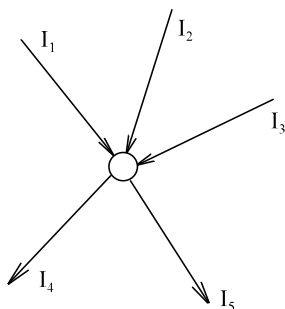


Bild EG231B

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5 \quad (2.3.1.A)$$

Wird die Knotensumme (2.3.1.A) umgestellt, ergibt sich:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0 \quad (2.3.1.B)$$

#### Erstes Kirchhoffsche Gesetz:

(Form B)

Die Summe der Ströme an einem Knoten ist gleich Null. Dazu gilt die Vereinbarung:  
 reinfließender Strom : positiv  
 rausfließender Strom : negativ

$$\text{Allgemein: } \sum_{j=1}^n I_j = 0$$

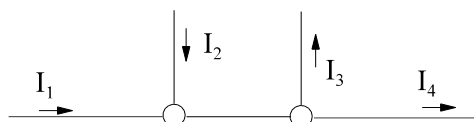
!!! Richtung der Ströme beachten !!!

Für Bild EG231B gilt dann (2.3.1.B):

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

#### Definition eines Knotens

Ein Knoten ist eine leitende Verbindung innerhalb eines Netzwerkes, die auch auseinander gezogen sein kann. Auch eine Verbindung nach Bild EG231C ist ein Knoten.

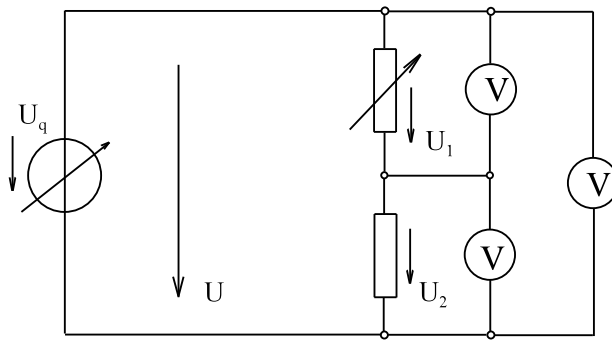


$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

Bild EG231C : Beispiel Knotensumme am auseinander gezogenem Knoten

### 2.3.2. Zweites Kirchhoffsche Gesetz

Um das zweite Kirchhoffsche Gesetz zu erläutern, wird der Versuch 2.5 durchgeführt, siehe Bild EG232A.



Ergebnis:  $U = U_1 + U_2$

Bild EG232A: Versuch 2.5

Die Spannung an der Reihenschaltung zweier Widerstände wird untersucht. Egal welcher Parameter ( $R_1$  oder  $U_q$  in Versuch 2.5) verändert wird, die Spannung an der Reihenschaltung ist immer die Summe der Einzelspannungen.

#### Zweites Kirchhoffsches Gesetz: (Form A)

**Die Summe der abfallenden Spannungen an den Widerständen in einem Stromkreis, besser allgemein ausgedrückt in einer Masche, ist gleich der Summe der erzeugenden Spannungen.**

$$\sum U = \sum U_q$$

Für das obere Beispiel gilt:

$$U_q = U_1 + U_2 \quad (2.3.2.A)$$

Die Gleichung (2.3.2.A) umgeformt, ergibt::

$$-U_q + U_1 + U_2 = 0 \quad (2.3.2.B)$$

Nach (2.3.2.B) kann das zweite Kirchhoffsche Gesetz angegeben werden:

#### Zweites Kirchhoffsches Gesetz: (Form B)

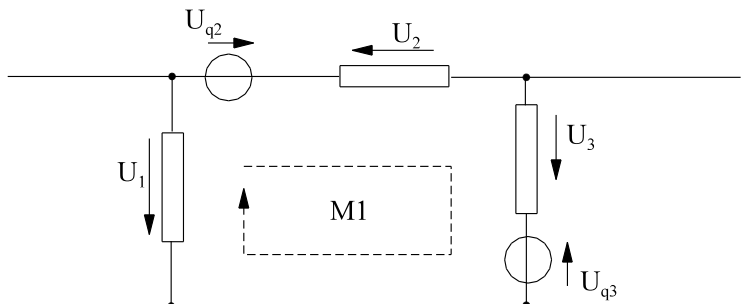
**Die Summe der Spannungen in einer Masche ist Null unter Beachtung des Vorzeichens. Dabei wird nicht mehr zwischen Quellspannungen und abfallenden Spannungen unterschieden. Spannungen in Maschenrichtung werden positiv gezählt und entgegengesetzt der Maschenrichtung negativ.**

$$\sum_{j=1}^n U_j = 0$$

Für das obere Beispiel gilt somit (2.3.2.B), wenn die Maschenrichtung rechtsrum gezählt wird.

#### Definition einer Masche

Eine Masche ist ein geschlossener Umlauf in einem Stromkreis. Ein Stromkreis kann mehrere Maschen aufweisen. Zur allgemeinen Auswertung bekommt eine Masche eine Maschenrichtung, die im ESB mit eingezeichnet wird.



M1(rechts)

$$U_{q2} - U_2 + U_3 - U_{q3} - U_1 = 0$$

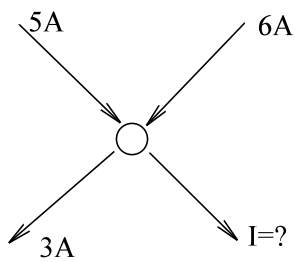
M2(links)

$$U_1 + U_{q3} - U_3 + U_2 - U_{q2} = 0$$

Bild EG232A: Beispielberechnung einer Masche

## 2.3.3. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.3

## Beispiel 1:

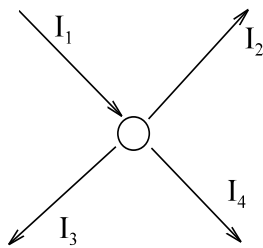


$$\sum I_{\text{rein}} = \sum I_{\text{raus}}$$

$$5 \text{ A} + 6 \text{ A} = 3 \text{ A} + I$$

$$I = 8 \text{ A}$$

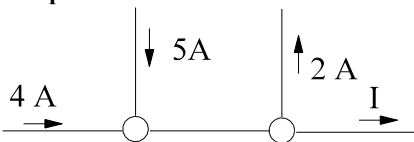
## Beispiel 2:



$$\sum I = 0$$

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

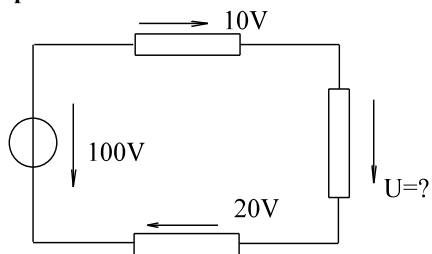
## Beispiel 3:



$$4 \text{ A} + 5 \text{ A} - 2 \text{ A} - I = 0$$

$$I = 4 \text{ A} + 5 \text{ A} - 2 \text{ A} = 7 \text{ A}$$

## Beispiel 4:



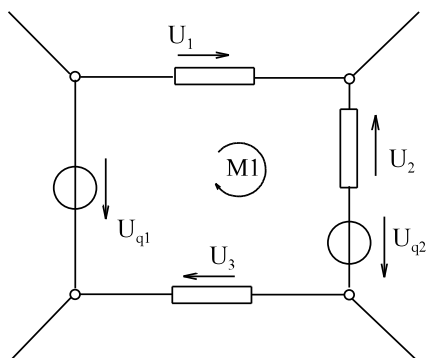
$$100 \text{ V} = 10 \text{ V} + U + 20 \text{ V}$$

$$U = 70 \text{ V}$$

oder

$$10 \text{ V} + U + 20 \text{ V} - 100 \text{ V} = 0$$

## Beispiel 5:



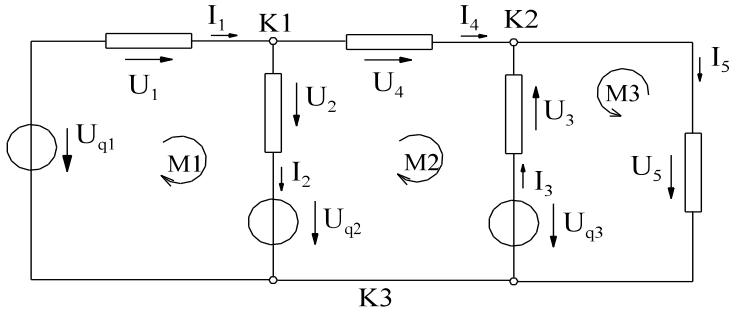
gesucht: Maschengleichung

**Prinzip zum Lösen von Beispiel 4:**

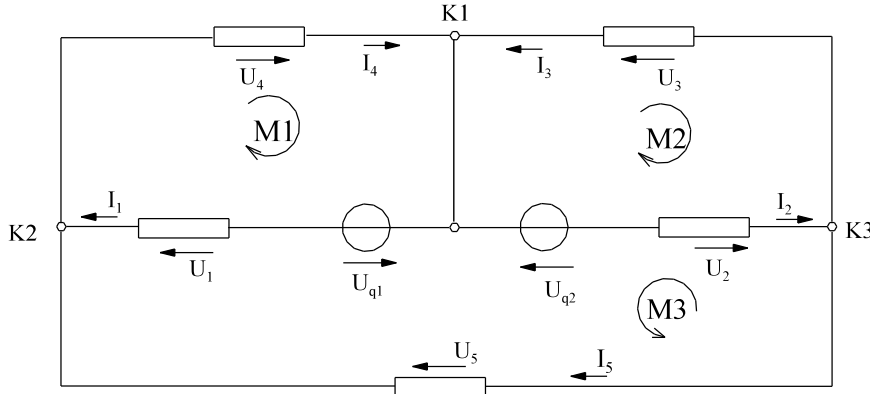
Maschenrichtung "M1" einzeichnen, danach Summe U gleich Null bilden.

$$U_1 - U_2 + U_{q2} + U_3 - U_{q1} = 0$$

**Beispiel 6:**



K1:  $I_1 - I_2 - I_4 = 0$   
 K2:  $I_4 + I_3 - I_5 = 0$   
 K3:  $-I_1 + I_2 - I_3 + I_5 = 0$   
  
 M1:  $U_1 + U_2 + U_{q2} - U_{q1} = 0$   
 M2:  $U_4 - U_3 + U_{q3} - U_{q2} - U_2 = 0$   
 M3:  $-U_3 + U_{q3} - U_5 = 0$



**Beispiel 7: Studierende:**  
Geben Sie Maschen- und Knotengleichungen an:

K1:  
 K2:  
 K3:  
 M1:  
 M2:  
 M3:

Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
AF.2.3.A	Ein Knoten ist ein leitende Verbindung zwischen zwei oder mehreren Zweigenden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	Ein Knoten ist auf einen Punkt beschränkt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	Ein Knoten kann auch auseinander gezogen sein.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.3.B	Eine Masche ist ein nicht vollständiger Umlauf in einem Netzwerk.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	Eine Masche ist ein vollständiger Umlauf in einem Netzwerk.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.3.C	Das Erste Kirchhoffsche Gesetz sagt aus:		
	* Die Summe der Maschen ist Null.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Die Summe der Ströme in einen Knoten ist unter Beachtung des Vorzeichens Null.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Die Summe der Spannungen in einem Knoten ist Null.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Unter Beachtung des Vorzeichens werden i.A. gezählt:		
	- reinfließende Ströme positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- reinfließende Ströme negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
- rausfließende Ströme negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
- rausfließende Ströme positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
<b>AF.2.3.D</b> Das zweite Kirchhoffsche Gesetz sagt aus:		
* Die Summe der Knoten ist Null.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
* Die Summe der Spannungen in einer Masche ist unter Beachtung des Vorzeichens Null.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
* Die Summe der Spannungen in einem Knoten ist Null.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
* Unter Beachtung des Vorzeichens werden i.A. gezählt:		
- Spannungen in Maschenrichtung positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Spannungen in Maschenrichtung negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Spannungen entgegen Maschenrichtung positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Spannungen entgegen Maschenrichtung negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Geben Sie das erste und das zweite Kirchhoffsche Gesetz als Summenformel an:

**Frage 2.3.A**

\_\_\_\_\_

---

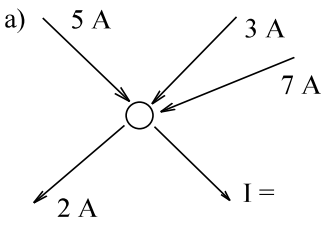
Geben Sie das erste und das zweite Kirchhoffsche Gesetz in Prosa an:

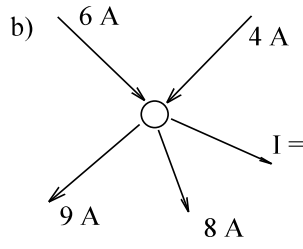
**Frage 2.3.B**

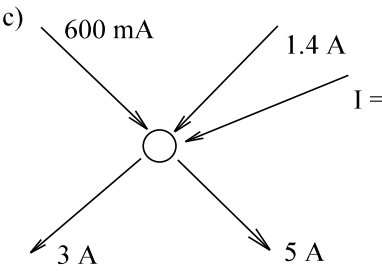
\_\_\_\_\_

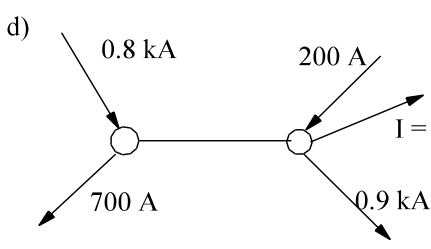
\_\_\_\_\_

**Aufgabe 2.3.A**  
Berechnen Sie den fehlenden Stromwert

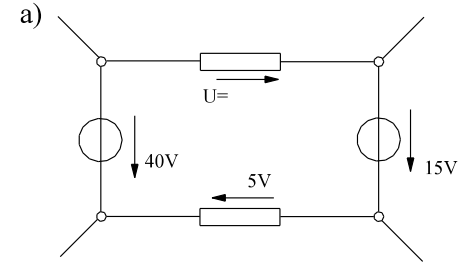
a) 

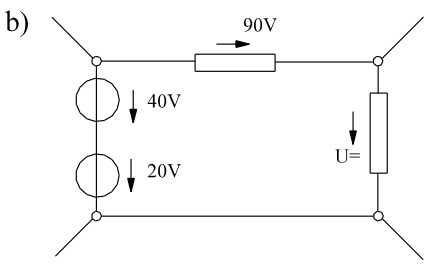
b) 

c) 

d) 

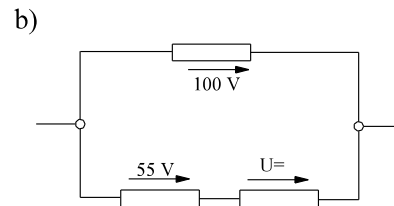
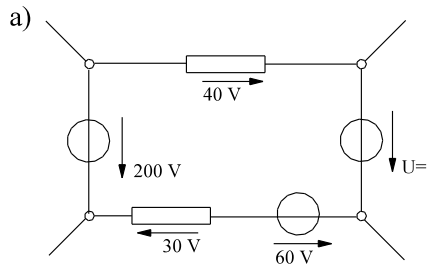
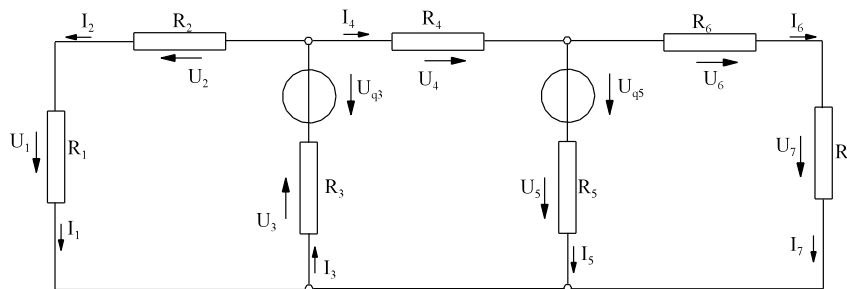
**Aufgabe 2.3.B**  
Berechnen Sie den fehlenden Spannungswert

a) 

b) 

**Aufgabe 2.3.C**

Berechnen Sie den fehlenden Spannungswert

**Aufgabe 2.3.D**

Geben Sie fünf Kontengleichungen und fünf Maschengleichungen an.

## 2.4. Ersatzwiderstände

### 2.4.1. Ersatzreihenwiderstand

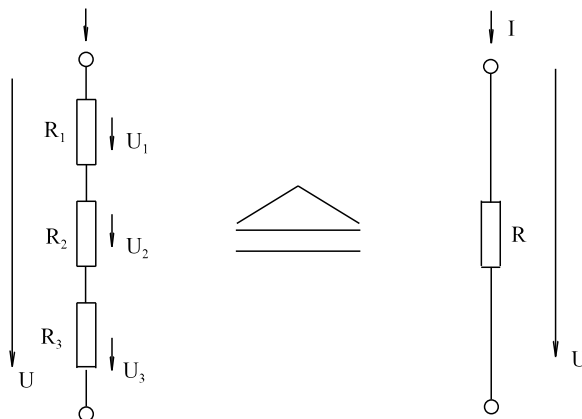


Bild EG241A: Ersatz-Reihenschaltung von Widerständen

Nach Bild EG241A soll versucht werden, die Reihenschaltung mehrerer Widerstände zu einem Widerstand zusammenzufassen. Dazu die folgende Herleitung:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 \\ U &= R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I \\ U &= (R_1 + R_2 + R_3) \cdot I \\ R &= R_1 + R_2 + R_3 \end{aligned}$$

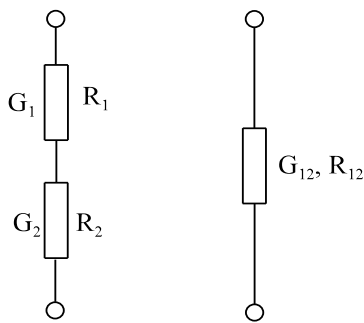
$$U_1 = R_1 \cdot I \quad U_2 = R_2 \cdot I \quad U_3 = R_3 \cdot I$$

$$U = R \cdot I$$

Ersatz-Reihenwiderstand

**Bei einer Reihenschaltung werden die Widerstände addiert.**

Auch für die Leitwerte kann eine Formel für die Reihenschaltung angegeben werden:



$$R_{12} = R_1 + R_2$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$$

$$G_{12} = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}} = \frac{G_1 * G_2}{G_1 + G_2}$$

Bild EG241B

### 2.4.2. Ersatzparallelwiderstand

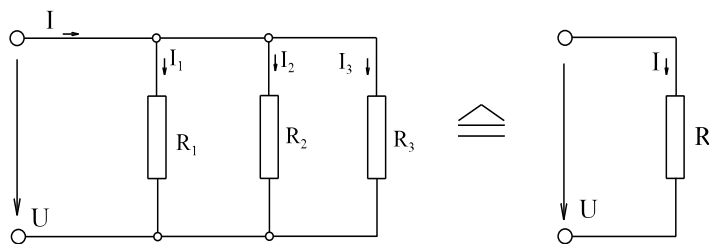


Bild EG42A: Ersatz-Parallelschaltung von Widerständen

Nach Bild EG242A soll versucht werden, die Parallelschaltung mehrerer Widerstände zu einem Widerstand zusammenzufassen. Dazu die folgende Herleitung:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad I_3 = \frac{U}{R_3}$$

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

$$I = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) * U$$

$$I = \frac{1}{R} * U$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Ersatz-Parallelwiderstand

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

Ersatz- Paralleleitwert

**In einer Parallelschaltung werden die Leitwerte addiert.**

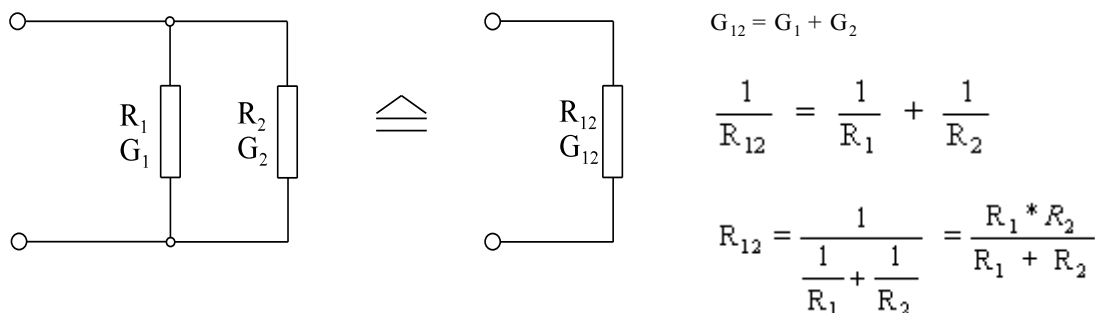
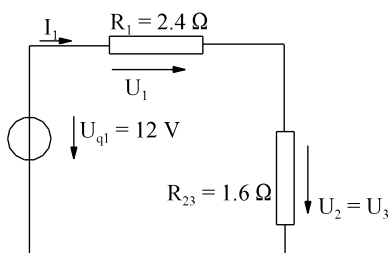
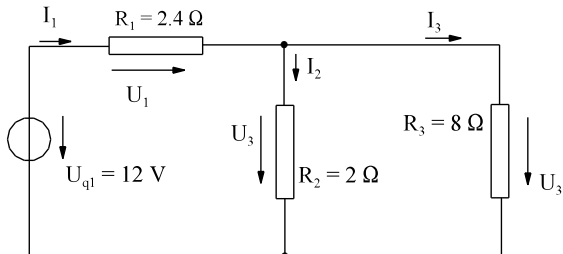


Bild EG242B

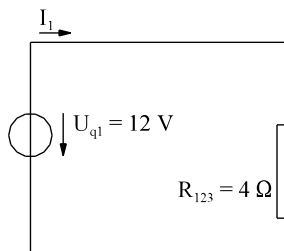
### 2.4.3. Berechnung von Netzen mit einer Spannungsquelle mit Hilfe des Ersatzwiderstandes

**Prinzip:** Das Netz wird soweit zu einem Ersatzwiderstand umgeformt, dass an der Spannungsquelle nur noch ein Ersatz-Widerstand vorhanden ist. Danach werden rückwärts alle anderen elektrischen Größen berechnet. Dazu drei Beispiele.

#### Beispiel 1:

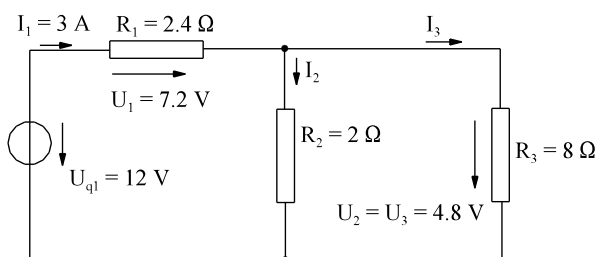


$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2 \Omega \cdot 8 \Omega}{2 \Omega + 8 \Omega} = 1.6 \Omega$$



$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 2.4 \Omega + 1.6 \Omega = 4 \Omega$$

$$I_1 = \frac{U_{q1}}{R_{123}} = \frac{12 \text{ V}}{4 \Omega} = 3 \text{ A}$$



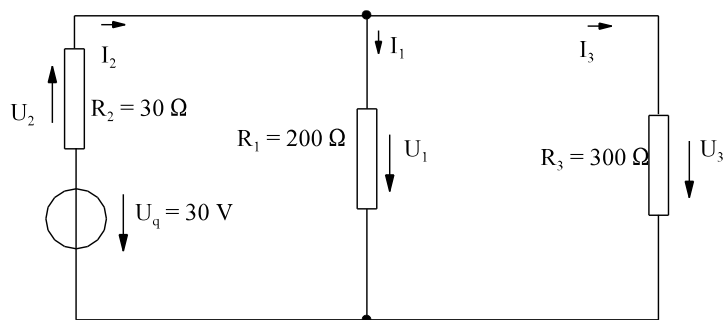
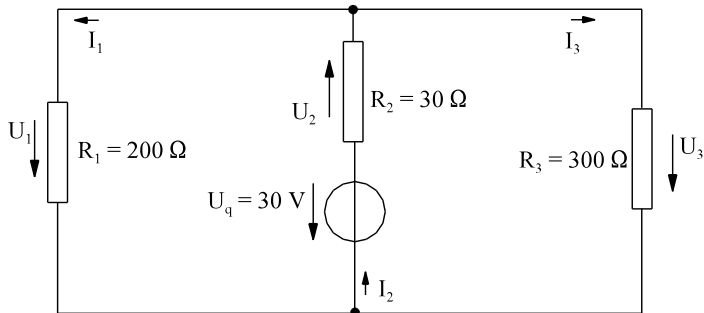
$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 3 \text{ A} \cdot 2.4 \Omega = 7.2 \text{ V}$$

$$U_2 = U_3 = R_{23} \cdot I_1 = 1.6 \Omega \cdot 3 \text{ A} = 4.8 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{4.8 \text{ V}}{2 \Omega} = 2.4 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{4.8 \text{ V}}{8 \Omega} = 0.6 \text{ A}$$



**Beispiel 2:**

$$R_{\text{ges}} = 30 \, \Omega + \frac{1}{\frac{1}{200 \, \Omega} + \frac{1}{300 \, \Omega}} = 150 \, \Omega$$

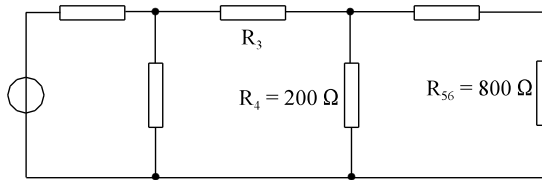
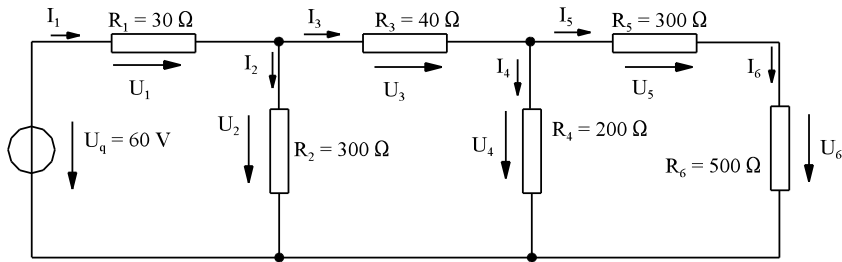
$$I_2 = \frac{U_q}{R_{\text{ges}}} = \frac{30 \, \text{V}}{150 \, \Omega} = 0.2 \, \text{A}$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = 0.2 \, \text{A} \cdot 30 \, \Omega = 6 \, \text{V}$$

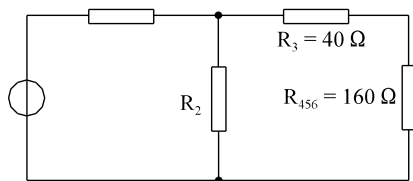
$$U_1 = U_3 = U_q - U_2 = 30 \, \text{V} - 6 \, \text{V} = 24 \, \text{V}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{24 \, \text{V}}{200 \, \Omega} = 0.12 \, \text{A}$$

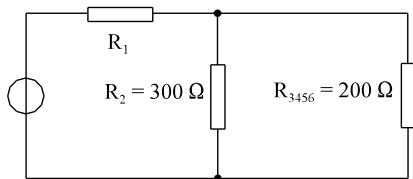
$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{24 \, \text{V}}{300 \, \Omega} = 0.08 \, \text{A}$$

**Beispiel 3:**

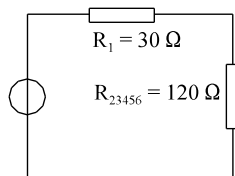
$$R_{56} = R_5 + R_6 = 300 \, \Omega + 500 \, \Omega = 800 \, \Omega$$



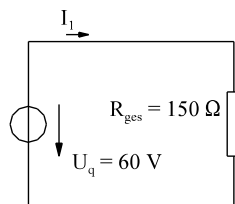
$$R_{456} = \frac{R_4 \cdot R_{56}}{R_4 + R_{56}} = \frac{200 \, \Omega \cdot 800 \, \Omega}{200 \, \Omega + 800 \, \Omega} = 160 \, \Omega$$



$$R_{3456} = R_3 + R_{456} = 40 \, \Omega + 160 \, \Omega = 200 \, \Omega$$



$$R_{23456} = \frac{R_2 \cdot R_{3456}}{R_2 + R_{3456}} = \frac{300 \, \Omega \cdot 200 \, \Omega}{300 \, \Omega + 200 \, \Omega} = 120 \, \Omega$$



$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_{23456} = 30 \, \Omega + 120 \, \Omega = 150 \, \Omega$$

$$I_1 = \frac{60 \, \text{V}}{150 \, \Omega} = 0.4 \, \text{A}$$

Weitere Berechnungen beziehen sich auf oberstes Bild.

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 0.4 \, \text{A} \cdot 30 \, \Omega = 12 \, \text{V}$$

$$U_2 = U_q - U_1 = 60 \, \text{V} - 12 \, \text{V} = 48 \, \text{V}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{48 \, \text{V}}{300 \, \Omega} = 0.16 \, \text{A}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0.4 \, \text{A} - 0.16 \, \text{A} = 0.24 \, \text{A}$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_3 = 0.24 \, \text{A} \cdot 40 \, \Omega = 9.6 \, \text{V}$$

$$U_4 = U_2 - U_3 = 48 \, \text{V} - 9.6 \, \text{V} = 38.4 \, \text{V}$$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{38.4 \, \text{V}}{200 \, \Omega} = 0.192 \, \text{A}$$

$$I_5 = I_3 - I_4 = 0.24 \, \text{A} - 0.192 \, \text{A} = 0.048 \, \text{A} = I_6$$

$$U_5 = I_5 \cdot R_5 = 0.048 \, \text{A} \cdot 300 \, \Omega = 14.4 \, \text{V}$$

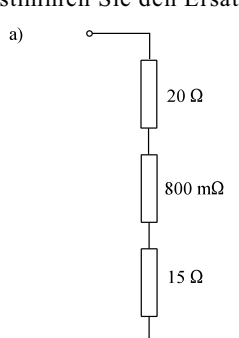
### 2.4.4. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 2.4

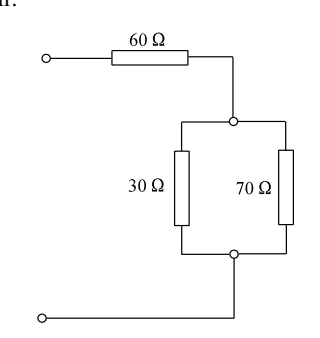
Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
AF.2.4A	In einer Reihenschaltung werden die Leitwerte addiert.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	In einer Reihenschaltung werden die Widerstände addiert.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	In einer Parallelschaltung werden die Widerstände addiert.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	In einer Parallelschaltung werden die Leitwerte addiert.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

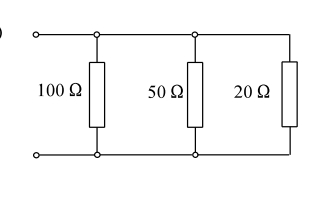
Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Gesamtwiderstandes einer Reihenschaltung an.  
**Frage 2.4.A**  
 \_\_\_\_\_

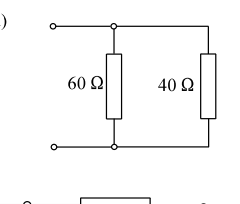
Geben Sie drei Formeln zur Berechnung des Gesamtwiderstandes einer Parallelschaltung an.  
**Frage 2.4.B**  
 \_\_\_\_\_

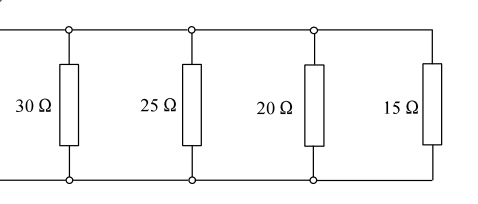
**Aufgabe 2.4.A**  
 Bestimmen Sie den Ersatzwiderstand an den offenen Klemmen:

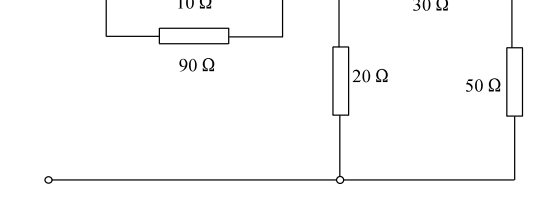
a) 

b) 

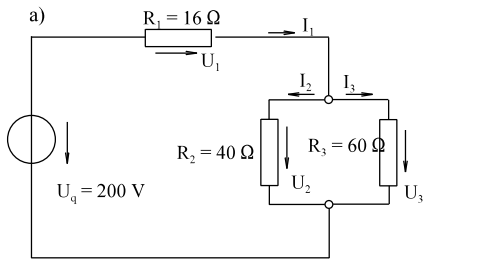
c) 

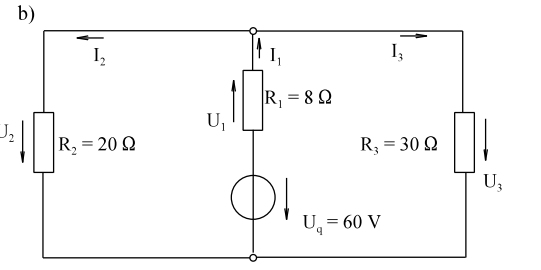
d) 

e) 

f) 

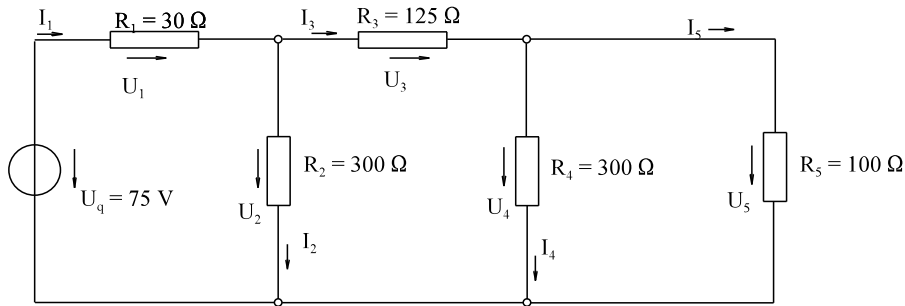
**Aufgabe 2.4.B**  
 Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen mit der Methode "Ersatzwiderstand bilden".

a) 

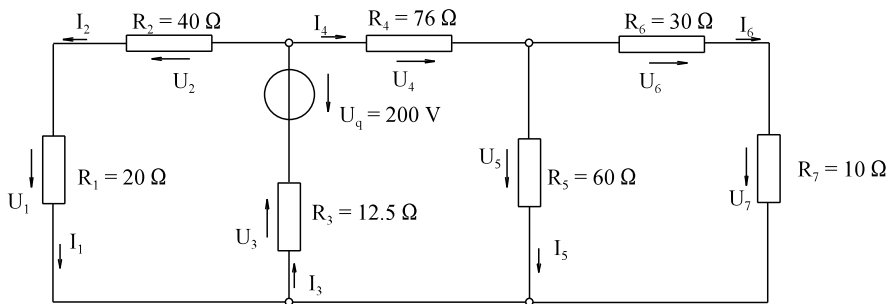
b) 

**Aufgabe 2.4.C**

Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen mit der Methode "Ersatzwiderstand bilden".

**Aufgabe 2.4.D**

Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen mit der Methode "Ersatzwiderstand bilden".



## 2.5. Strom- und Spannungsteiler

### 2.5.1. Spannungsteiler

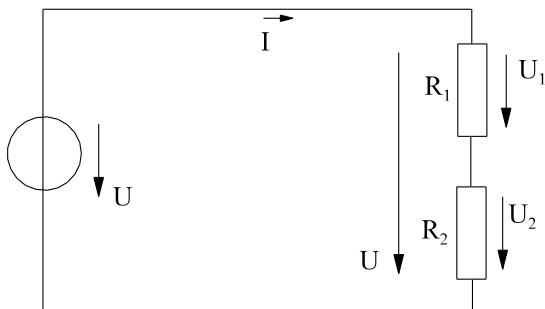


Bild EG251A: Einfacher Spannungsteiler

Ziel: Es soll versucht werden, die Spannungen in einer Reihenschaltung nach Bild EG251A direkt (ohne den Umweg über die Stromberechnung) zu bestimmen. Dazu die folgende Herleitung:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$$

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}}$$

$$U_1 = I \cdot R_1$$

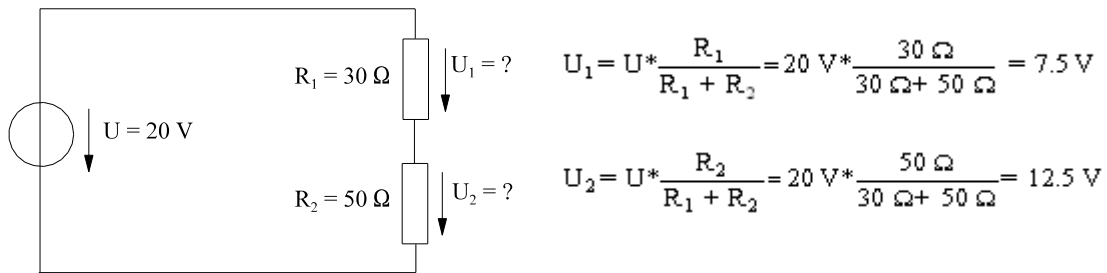
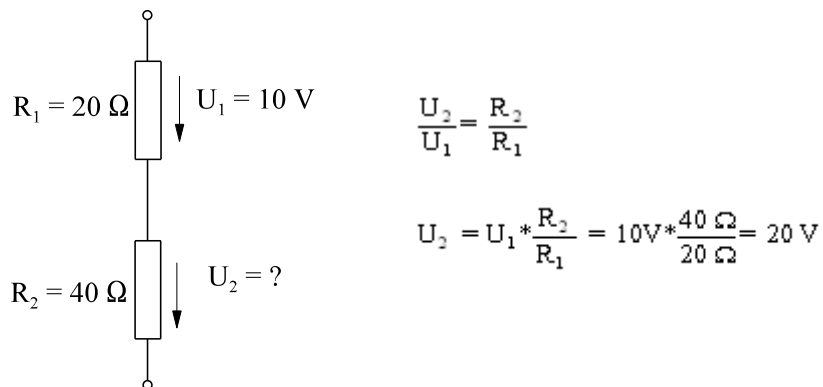
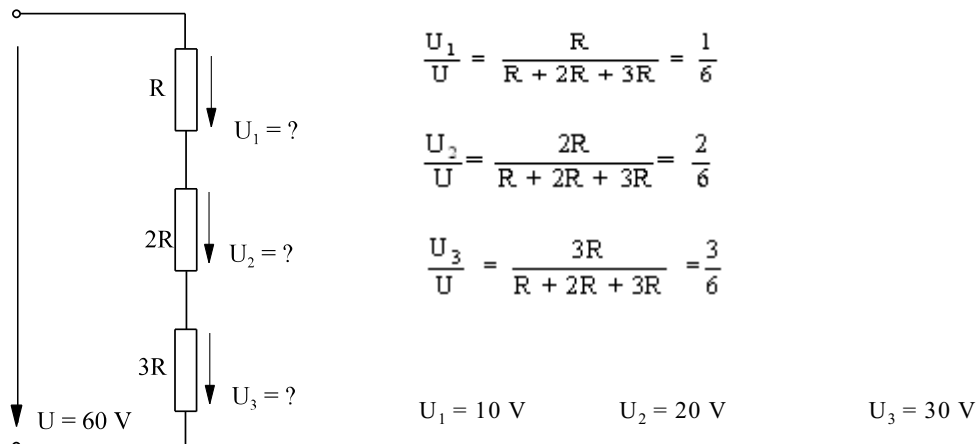
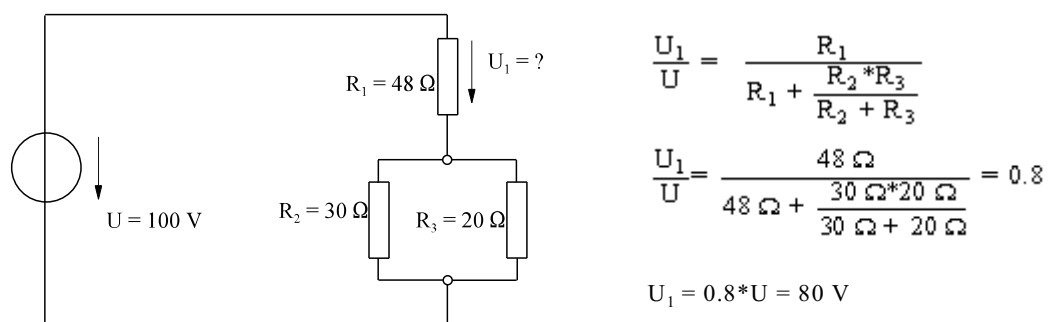
$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$
---	---	-------------------------------------

Die Spannungsteiler-Regel besagt, dass sich in einer Reihenschaltung die Spannungen proportional zu den

**Widerständen aufteilen.****Beispiel 1:****Beispiel 2:****Beispiel 3:****Beispiel 4:**

## 2.5.2. Stromteiler

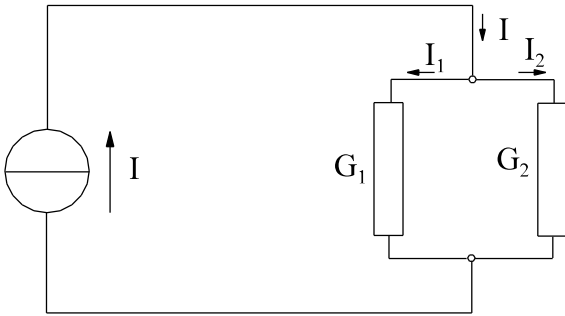


Bild EG252A

Ziel: Es soll versucht werden, die Ströme in einer Parallelschaltung nach Bild EG252A direkt (ohne den Umweg über die Spannungsberechnung) zu ermitteln. Dazu die folgende Herleitung:

$$I_1 = U \cdot G_1$$

$$I = U \cdot G$$

$$I_2 = U \cdot G_2$$

$$G = G_1 + G_2$$

$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}$	$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}$	$\frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}$
---	---	---

### Die Ströme teilen sich im Verhältnis der Leitwerte auf.

Werden die Leitwerte durch Widerstände ersetzt, erhält man:

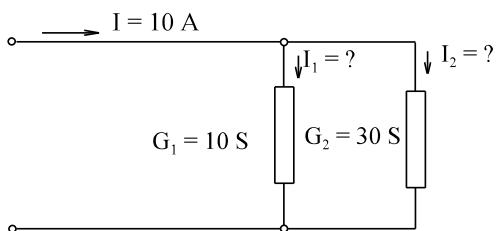
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1}$$

oder

$$\frac{I_1}{I} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$\frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$
---	---	-------------------------------------

#### Beispiel 1:

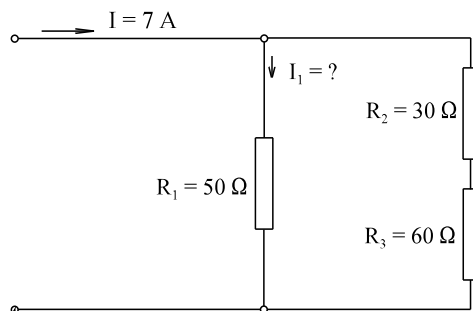


$$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

$$\Rightarrow I_1 = 10 \text{ A} \cdot \frac{10 \text{ S}}{10 \text{ S} + 30 \text{ S}} = 2.5 \text{ A}$$

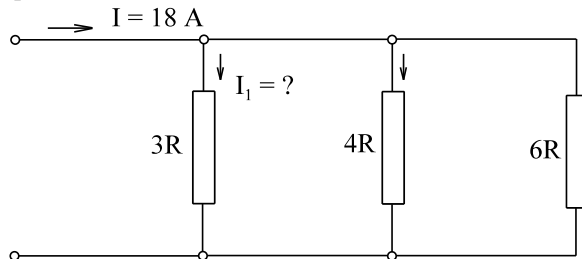
$$\frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

$$\Rightarrow I_2 = 10 \text{ A} \cdot \frac{30 \text{ S}}{10 \text{ S} + 30 \text{ S}} = 7.5 \text{ A}$$

**Beispiel 2:**

$$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_{23}} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2 + R_3}}$$

$$I_1 = 7 \text{ A} * \frac{\frac{1}{50 \Omega}}{\frac{1}{50 \Omega} + \frac{1}{30 \Omega + 60 \Omega}} = 4.5 \text{ A}$$

**Beispiel 3:**

$$\frac{I_1}{I} = \frac{\frac{1}{3R}}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{4R} + \frac{1}{6R}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{4}{9}$$

$$I_1 = \frac{4}{9} * 18 \text{ A} = 8 \text{ A}$$

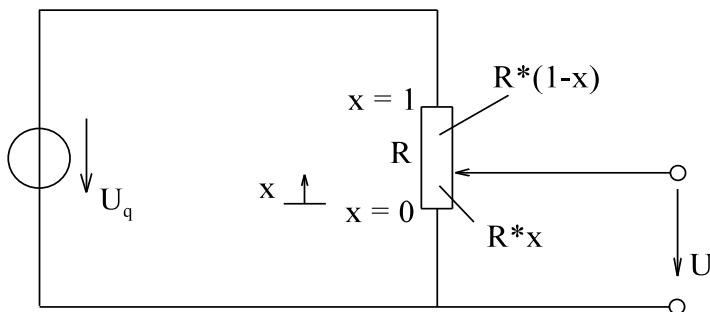
**2.5.3. Potentiometer als Spannungsteiler****2.5.3.1. Unbelastetes Potentiometer**

Bild EG2531A

Beim linearen Potentiometer nach Bild EG2531A wird die Schleiferstellung  $x$  eingeführt. Das Potentiometer hat den Widerstandswert  $R$ . Mit Hilfe der Schleiferstellung lässt sich der Widerstand  $R$  aufteilen, in  $R*x$  und in  $R*(1-x)$ , siehe Bild EG2531A.

Nach den Spannungsteiler-Prinzip kann die Spannung  $U$  berechnet werden.

$$\frac{U}{U_q} = \frac{R*x}{R*x + R*(1-x)} = \frac{R*x}{R*x + R - R*x} = \frac{R*x}{R} = x$$

Das Spannungsverhältnis von Eingangs- zu Ausgangsspannung ist beim unbelasteten Potentiometer gleich der Schleiferstellung  $x$ .

## 2.5.3.2. Belastetes Potentiometer

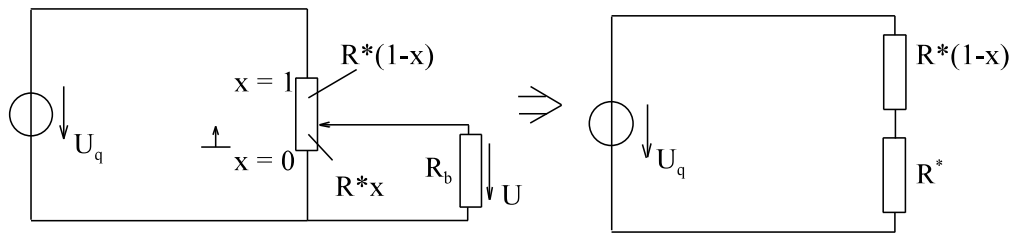


Bild EG2532A

Wird das Potentiometer belastet, ergibt sich das ESB nach Bild EG2532A. Die Widerstände  $R^*x$  und  $R_b$  können als Parallelwiderstand zusammengefasst werden:

$$R^* = \frac{R^*x \cdot R_b}{R^*x + R_b}$$

Das Verhältnis von  $U/U_q$  ergibt sich als Spannungsteiler der Widerstände  $(1-x)R$  und  $R^*$ .

$$\frac{U}{U_q} = \frac{R^*}{(1-x)R + R^*} = \frac{\frac{R^*x \cdot R_b}{R^*x + R_b}}{(1-x)R + \frac{R^*x \cdot R_b}{R^*x + R_b}} = \frac{R^*x \cdot R_b}{(1-x)R(R^*x + R_b) + R^*x \cdot R_b}$$

$$\frac{U}{U_q} = \frac{x \cdot R_b}{R^*x - R^*x^2 + R_b - x \cdot R_b + x \cdot R_b} = \frac{x}{x \cdot (1 - \frac{R}{R_b}) + 1}$$

Die obere Funktion ist nun nicht mehr linear von der Schleiferstellung  $x$  abhängig. Die lineare  $x$ -Abhängigkeit wird durch ein Polynom in  $x$  dividiert. Nur wenn der Wert von  $R$  gegen Null geht (oder  $R_b \rightarrow \infty$ ) ist eine fast lineare Abhängigkeit vorhanden. Bei großen Werten von  $R/R_b$  ergibt sich eine starke Nichtlinearität, siehe auch Bild EG2532B.

**Um eine lineare Abhängigkeit beim Potentiometer zu erhalten, muss der Potentiometer-Widerstand wesentlich kleiner sein als der Belastungswiderstand.**

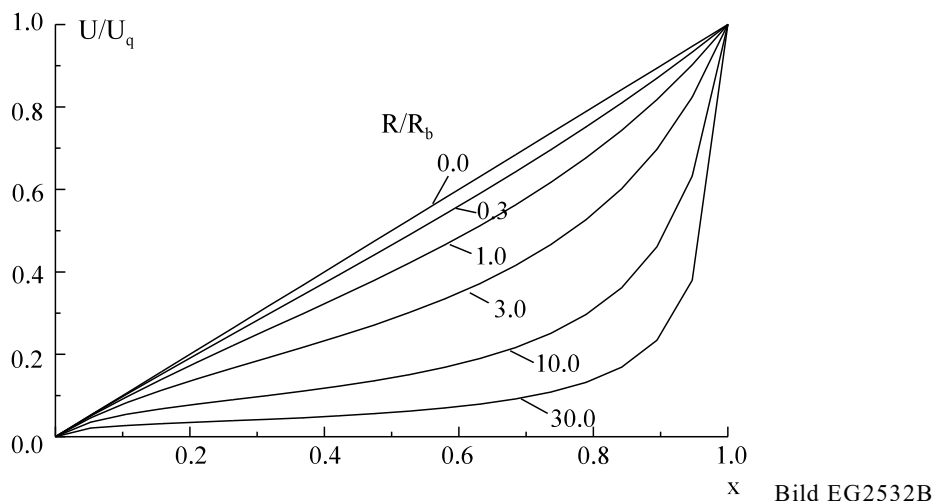


Bild EG2532B

Will man die maximale Abweichung von der Linearität feststellen, muss der obere Ausdruck mathematisch ausgewertet werden. Dieses führt auf eine Gleichung 3. Grades, die analytisch schwer lösbar ist. Für den Praktiker reicht, die Abweichung bei  $x = 0,7$  auszuwerten. Dieses ist eine erhebliche Verringerung des mathematischen Aufwandes.



### 2.5.4. Übungen, Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.5

**Beispiel**

Ein Potentiometer mit dem Widerstand von  $R = 5 \text{ k}\Omega$  soll bei einer Schleifenstellung von  $x = 0.7$  eine Abweichung von höchstens  $0.1 \%$  bezogen auf den Endwert aufweisen. Wie groß ist der Belastungswiderstand  $R_b$  zu wählen?

**Lösung:**

**gegeben:** Potentiometer:  $R = 5 \text{ k}\Omega$   
 Abweichung: bei  $x = 0.7$   $0.1 \%$  Abweichung bezogen auf den Endwert  
**gesucht:**  $R_b$

$$0.1\% \hat{=} 0.001 = x \cdot \frac{U}{U_q} = x \cdot \frac{x}{x \cdot (1-x) \frac{R}{R_b} + 1}$$

$$0.001 = 0.7 \cdot \frac{0.7}{0.7 \cdot (1-0.7) \frac{R}{R_b} + 1}$$

$$\frac{0.7}{0.21 \frac{R}{R_b} + 1} = 0.699$$

$$\frac{0.7}{0.699} = 1 + 0.21 \frac{R}{R_b}$$

$$\frac{R}{R_b} = \frac{1}{0.21} \left( \frac{0.7}{0.699} - 1 \right)$$

$$R_b = R \cdot \frac{0.21}{\frac{0.7}{0.699} - 1} = 5 \text{ k}\Omega \cdot \frac{0.21}{\frac{0.7}{0.699} - 1} = 734 \text{ k}\Omega$$

- Damit die Abweichung von der Linearität kleiner ist als  $0.1 \%$ , muss der Lastwiderstand des Potentiometers größer sein als  $734 \text{ k}\Omega$ .
- Die Berechnung von  $0.7/0.69$  auf 4 Stellen Genauigkeit und anschließender Subtraktion von 1 führt wegen der Differenzenbildung fast gleich großer Zahlen zu einem größeren Fehler.

Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
<b>AF.2.5.A</b>	Die Spannungsteilerregel sagt aus: * In einer Reihenschaltung verhalten sich die Spannungen wie die Leitwerte. * In einer Reihenschaltung verhalten sich die Spannungen wie die Widerstände. * In einer Parallelschaltung verhalten sich die Ströme wie die Widerstände. * In einer Reihenschaltung verhalten sich die Ströme wie die Widerstände.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.5.B</b>	Die Stromteilerregel sagt aus: * In einer Parallelschaltung verhalten sich die Spannungen wie die Leitwerte. * In einer Reihenschaltung verhalten sich die Spannungen wie die Leitwerte. * In einer Parallelschaltung verhalten sich die Ströme wie die Widerstände. * In einer Parallelschaltung verhalten sich die Ströme wie die Leitwerte.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.5.C</b>	Damit der relative Spannungsabgriff am Potentiometer möglichst der Schleifenstellung entspricht, sollte: * der Belastungswiderstand möglichst groß sein * der Belastungswiderstand möglichst klein sein * der Belastungsleitwert möglichst klein sein * der Belastungsleitwert möglichst groß sein	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Die Spannungsteilerregel sagt aus:

**Frage 2.5.A**

-----

-----

Die Stromteilerregel sagt aus:

**Frage 2.5.B**

-----  
 -----

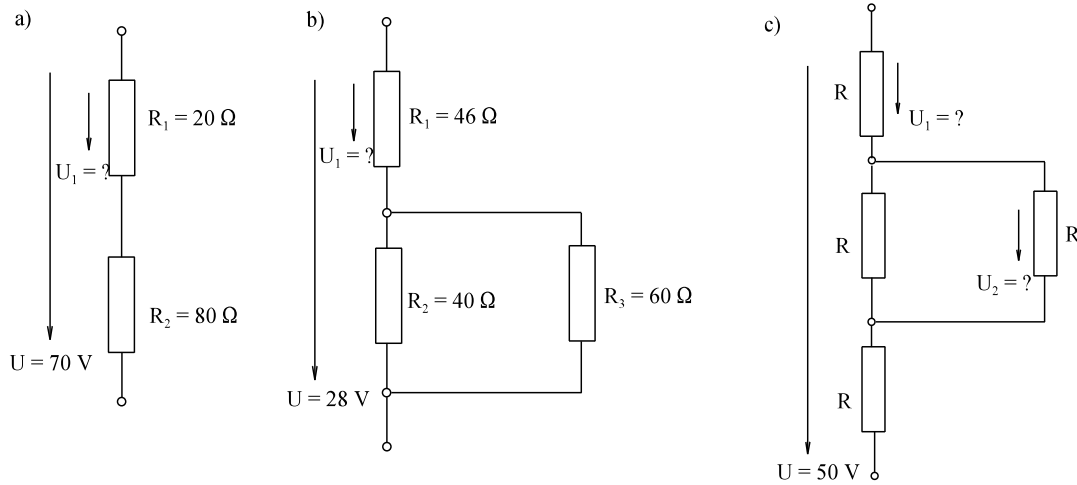
Wie groß ist der Belastungswiderstand  $R_b$  eines Potentiometers in Bezug auf den Potentiometerwiderstand  $R$  zu wählen, damit die Ausgangsspannung möglichst linear von der Schleifenstellung abhängig ist?

**Frage 2.5.C**

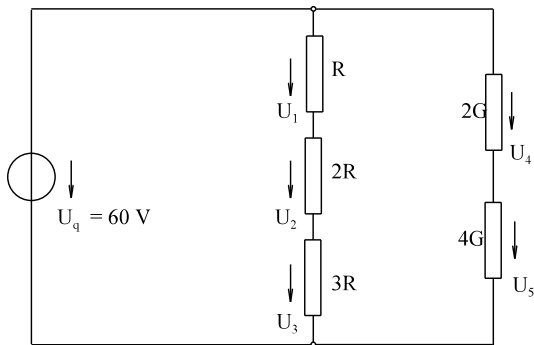
-----  
 -----

**Aufgabe 2.5.A**

Berechnen Sie mit Hilfe der Spannungsteilerregel die mit "?" gekennzeichneten Spannungen.



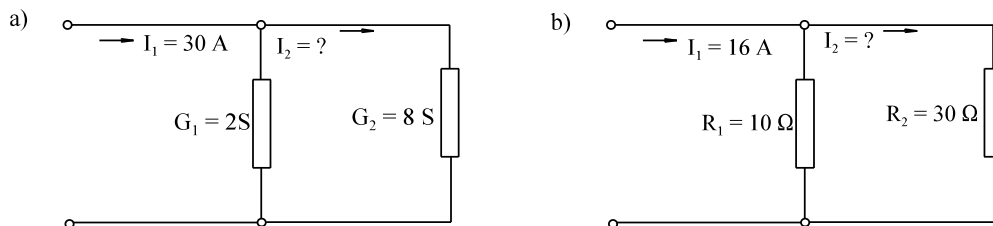
**Aufgabe 2.5.B**

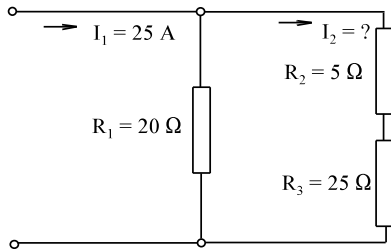


Berechnen Sie mit Hilfe der Spannungsteilerregel die Spannungen  $U_1$  bis  $U_5$ .

**Aufgabe 2.5.C**

Berechnen Sie den Strom  $I_2$  nach der Stromteilerregel.

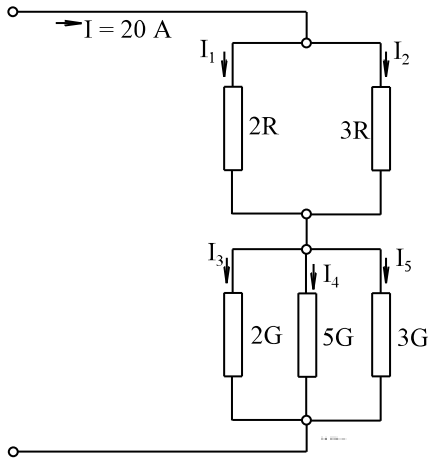


**Aufgabe 2.5.C**

Berechnen Sie den Strom  $I_2$  nach der Stromteileregeln.

**Aufgabe 2.5.E**

Berechnen Sie mit Hilfe des Stromteilers die Ströme  $I_1$  bis  $I_5$ .

**Aufgabe 2.5.F**

Ein Potentiometer mit dem Widerstand  $R = 1 \text{ k}\Omega$  wird mit einem  $10 \text{ k}\Omega$  Widerstand belastet. Die Versorgungsspannung beträgt  $U_q = 10 \text{ V}$ . Wie groß ist die Abweichung der Schleiferspannung  $U$  vom erwarteten Wert bei der Schleiferstellung  $x = 0.7$ ?

## 2.6. Strom- Spannungs- und Widerstandsmessungen

Hier sollen nicht die modernen Multimeter mit Digitalanzeige behandelt werden. Dazu fehlen im Moment noch die elektronischen Grundlagen. Die alten Zeigermeßgeräte werden hier kurz erläutert.

### 2.6.1. Strom-Messung

#### 2.6.1.1. Prinzip und ESB

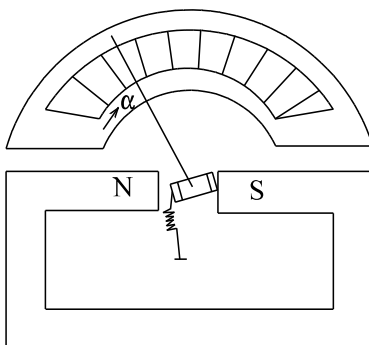


Bild EG2611A

Das Prinzip der Zeigermeßgeräte ist aus Bild EG2611A zu erkennen. Ein Strom verursacht eine Kraftwirkung. Diese Kraft wirkt auf drehbar gelagerte Teile. Mit Hilfe einer linearen Feder wird die Kraft in einen proportionalen Zeigerausschlag umgesetzt. Die Skala kann in Werten einer physikalischen Größe geeicht oder kalibriert werden.

Im dritten Semester wird gezeigt, dass ein stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld eine Kraftwirkung erfährt, die proportional zum Strom ist. Wird nun eine Spule drehbar in einem Magnetfeld befestigt, ergibt sich ein Drehmoment proportional zum Strom. Dieses Drehmoment wird mit Hilfe einer linearen Feder in einen Zeigerausschlag  $\alpha$  umgesetzt, der proportional zum Strom ist. Man spricht von **Drehspulmessern**, die eine lineare Skala aufweisen.

Wird das Messgerät mit einer Frequenz beaufschlagt, so dass die Mechanik nicht mehr folgen kann, zeigt das Messgerät einen Mittelwert an. Bildet man den Mittelwert über eine Periode, zeigt das Drehspulmessgerät den arithmetischen Mittelwert an, siehe Kap. 6.4.1. Weil der arithmetische Mittelwert negativ werden kann, ist ein

Zeigerausschlag in zwei Richtungen möglich.

$\alpha \sim I$  **Drehspulmessgeräte**

Ein anderes Prinzip weisen die **Dreheisenmessgeräte** auf: Ein vom Strom durchflossene Spule erzeugt ein Magnetfeld. Zwei parallele Eisenteile im Magnetfeld stoßen sich gegenseitig ab. Die Kraft wird in einen Zeigerausschlag umgesetzt. Die Kraft ist proportional dem Magnetfeld zum Quadrat (3.Semester). Da das Magnetfeld proportional zum Strom ist, ist der Zeigerausschlag quadratisch zum Strom proportional. Deshalb ist auch die Skalaeinteilung nichtlinear. Durch die geometrische Form der gegenüberliegenden Eisenteile kann die Skala noch beeinflusst werden. Bildet man den Mittelwert über eine Periode, zeigt das Dreheisen-Messgerät den quadratischen Mittelwert an, siehe Kap. 6.4.2. Der quadratische Mittelwert kann nur positiv werden, daher erfolgt der Zeigerausschlag nur in einer Richtung.

$\alpha \sim I^2$  **Dreheisenmessgeräte**

**Ersatzschaltbild (ESB)**

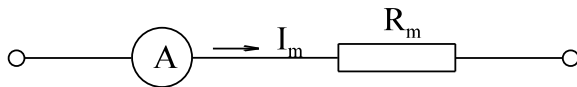


Bild EG2611B: ESB eines realen Strommessers

Das ESB eines realen Strommessers zeigt Bild EG2611B. Die Spule hat einen ohmschen Widerstand, der mit  $R_m$  bezeichnet wird. Das System sollte bei der Messung nicht großartig beeinflusst werden. Damit der Spannungsabfall eines Strommessers möglichst gering wird, muss der Innenwiderstand eines Strommessers möglichst klein sein. Der Innenwiderstand des idealen Strommessers, siehe Bild EG2611B der linke Teil, ist Null.

**Zusammenfassung:**

**Drehspulmessgerät**

$\alpha \sim I$   
lineare Skala  
arithmetischer Mittelwert  
pos. und neg. Ausschlag

**Dreheisenmessgerät**

$\alpha \sim I^2$   
nichtlineare Skala  
quadratischer Mittelwert  
nur positiver Ausschlag

**2.6.1.2. Messbereichserweiterung**

Verlangt: Anzeige:  $I = I_m \cdot n$   $n$  - Messbereich-Erweiterungsfaktor

Was tun? Antwort:  $R_p$  zum Strommesser parallelschalten, siehe Bild EG2612A.

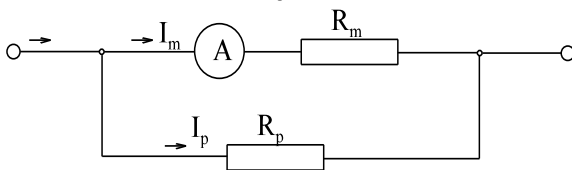


Bild EG2612A: ESB Messbereichserweiterung des Strommessers

Nach der Stromteiler-Regel (Kap.2.5.2) und nach Bild EG2612A ergibt sich:

$$n = \frac{I}{I_m} = \frac{G_m + G_p}{G_m} = \frac{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_p}}{\frac{1}{R_m}} = \frac{R_p + R_m}{R_p} = 1 + \frac{R_m}{R_p}$$

$$n - 1 = \frac{R_m}{R_p}$$

$$R_p = \frac{R_m}{n - 1}$$

**Beispiel:**

Ein Amperemeter mit dem Innenwiderstand  $R_i = 0.1 \Omega$  hat bei einem Messbereich  $I_{\text{Mess1}} = 5 \text{ A}$  Vollausschlag. Der Messbereich soll auf  $I_{\text{Mess2}} = 20 \text{ A}$  erweitert werden. Geben Sie eine Schaltung zur Messbereichserweiterung an.

**Lösungsweg:**

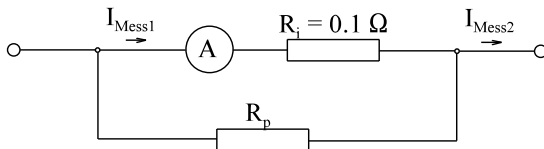
**gegeben:** Amperemeter

$$R_i = 0.1 \Omega$$

$$I_{\text{Mess1}} = 5 \text{ A}$$

$$I_{\text{Mess2}} = 20 \text{ A}$$

**gesucht:** Messbereichserweiterung

**Lösungsweg 1 (nach Formel)**

$$n = \frac{I_{\text{Mess2}}}{I_{\text{Mess1}}} = \frac{20 \text{ A}}{5 \text{ A}} = 4$$

$$R_p = \frac{R_i}{n-1} = \frac{0.1 \Omega}{4-1} = 0.03333 \Omega$$

**Lösungsweg 2**

$$U_{\text{Mess}} = R_i \cdot I_{\text{Mess1}} = 0.1 \text{ A} \cdot 5 \text{ A} = 0.5 \text{ V}$$

$$I_p = I_{\text{Mess2}} - I_{\text{Mess1}} = 20 \text{ A} - 5 \text{ A} = 15 \text{ A}$$

$$R_p = \frac{U_{\text{Mess}}}{I_p} = \frac{0.5 \text{ V}}{15 \text{ A}} = 0.03333 \Omega$$

**2.6.2. Spannungsmessung****2.6.2.1. Prinzip und ESB**

Das Prinzip der Spannungsmessung könnte das eines elektrostatischen Messgerät sein, siehe Kap. 8 (2. Semester). Dieses ist aber nicht verbreitet. Der Ausweg ist das ohmsche Gesetz. Danach sind Strom und Spannung einander proportional. Die Strom-Messung wurde im letzten Abschnitt erklärt.

Die Messungen sollten möglichst wenig das Messobjekt beeinflussen. Beim Spannungsmesser wird verlangt, dass dieser eine möglichst geringe Stromaufnahme hat. Dieses bedingt einen möglichst hohen Innenwiderstand beim Spannungsmesser

$I_m \sim U_m$  damit Strommessung  
 $R_m$  möglichst groß

Da jede Spule einen temperaturabhängigen Widerstand aufweist, ist der Ausschlag temperaturabhängig.

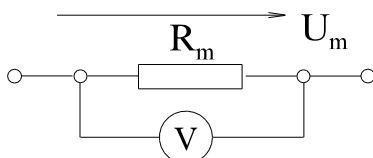


Bild EG2621A: ESB des realen Voltmeter

Das ESB eines Voltmeters nach Bild EG2621A besteht aus der Parallelschaltung eines idealen Voltmeters (Innenwiderstand  $\infty$ ) und dem Innenwiderstand  $R_m$  des Messgerätes.

### 2.6.2.2. Messbereichserweiterung

Das Voltmeter nach Bild EG2622A wird durch einen Vorwiderstand  $R_v$  in Reihe erweitert.

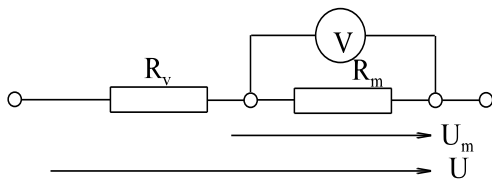


Bild EG2622A: ESB der Messbereichserweiterung bei Spannungsmessern

**Definition:**  $n = \frac{U}{U_m} = \text{Messbereichserweiterungsfaktor}$

Nach der Spannungsteiler-Regel ergibt sich

$$n = \frac{U}{U_m} = \frac{R_v + R_m}{R_m} = 1 + \frac{R_v}{R_m}$$

$$R_v = (n-1)R_m$$

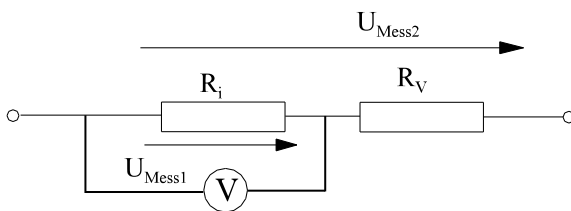
#### Beispiel:

Ein Voltmeter mit dem Innenwiderstand  $R_i = 500 \text{ k}\Omega$  hat bei einem Messbereich  $U_{\text{Mess1}} = 100 \text{ V}$  Vollausschlag. Der Messbereich soll auf  $U_{\text{Mess2}} = 500 \text{ V}$  erweitert werden. Geben Sie eine Schaltung zur Messbereichserweiterung an.

#### Lösungsweg:

**gegeben:** Voltmeter  
 $R_i = 500 \text{ k}\Omega$   
 $U_{\text{Mess1}} = 100 \text{ V}$   
 $U_{\text{Mess2}} = 500 \text{ V}$

**gesucht:** Messbereichserweiterung



#### Lösungsweg 1 (nach Formel)

$$n = \frac{U_{\text{Mess2}}}{U_{\text{Mess1}}} = \frac{500\text{V}}{100\text{V}} = 5$$

$$R_v = (n - 1) \cdot R_i = (5 - 1) \cdot 500 \text{ k}\Omega = 2 \text{ M}\Omega$$

#### Lösungsweg 2

$$I_{\text{Mess}} = \frac{U_{\text{Mess1}}}{R_i} = \frac{100\text{V}}{500\text{k}\Omega} = 0.2\text{mA}$$

$$U_{RV} = U_{\text{Mess2}} - U_{\text{Mess1}} = 500 \text{ V} - 100 \text{ V} = 400 \text{ V}$$

$$R_v = \frac{U_{RV}}{I_{\text{Mess}}} = \frac{400\text{V}}{0.2\text{mA}} = 2\text{M}\Omega$$

## 2.6.3. Widerstandsmessung

### 2.6.3.1. Ohmsches Gesetz

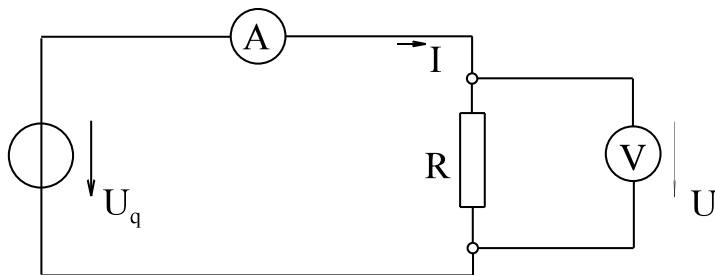


Bild EG2631A: Bestimmung von R durch U- und I-Messung

Mit Hilfe der Strom- und Spannungsmessung nach Bild EG2631A und Hilfe des ohmschen Gesetzes kann der Widerstand auch bestimmt werden:

$$R = \frac{U}{I}$$

### 2.6.3.2. Direkt anzeigende Widerstandsmessgeräte

In Multimetern sind häufig Widerstands-Messungen enthalten. Die Skala ist dabei nichtlinear. Bei Vollausschlag ist der Widerstand Null und in Ruhestellung der Widerstand unendlich ( $\infty$ ), siehe Bild EG2632A.

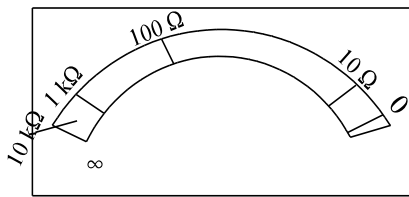


Bild EG2632A: Skala in Ohm calibriert

Wie ergibt sich die nichtlineare Skala. Was für eine physikalische Größe misst das Messgerät? Antwort: Der Zeigerausschlag ist proportional zum Strom. Wie groß der Strom ist, lässt sich aus dem Schaltbild eines direkt anzeigenden Ohmmeters nach Bild EG2632B ableiten.

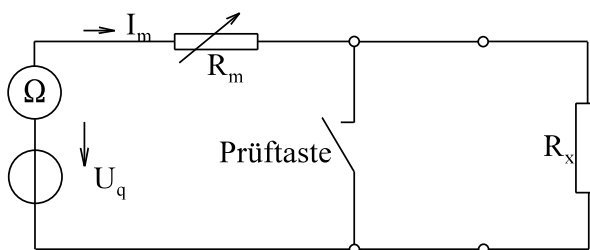


Bild EG2632B: Schaltbild eines direktanzeigenden Ohmmeters

Nach Bild EG2632B wird der Kurzschluss ( $R_x=0$ ) durch das Betätigen der Prüftaste simuliert. Durch das Potentiometer  $R_m$  wird gerade Vollausschlag ( $R=0$ ) eingestellt. Daraus ergibt sich ein Strom:

$$I_{\text{max}} = \frac{U_q}{R_m}$$

Mit dem Widerstand  $R_x$  im Kreis lässt sich der Messstrom

$$I_m = \frac{U_q}{R_m + R_x}$$

berechnen. Bei einem linearen Messgerät (Drehspulmessgerät) ist der Ausschlag zum Strom  $I_m$  proportional. Mit  $\alpha_{\max} = 1$  (Vollausschlag) lässt sich der Ausschlag

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} = \frac{\alpha}{1} = \frac{I_m}{I_{\max}} = \frac{\frac{U_q}{R_m + R_x}}{\frac{U_q}{R_m}} = \frac{R_m}{R_m + R_x}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{R_x}{R_m}}$$

des Messgerätes berechnen. Hat nun die Spannung  $U_q$  noch einen Einfluss auf das Messergebnis? Beim ersten Hinsehen vermutet man: nein, weil  $U_q$  in der Formel für  $\alpha$  nicht mehr enthalten ist. Bei näherem Hinsehen, entpuppt sich diese Methode allerdings als spannungsabhängig. Warum? Mit der Spannung  $U_q$  ändert sich auch der einzustellende Messwiderstand  $R_m$ , damit bei Vollausschlag der dazu erforderliche Strom fließt. Dieses bewirkt eine Veränderung des Zeigerausschlags nach oberer Formel.

### 2.6.3.3. Widerstands-Messbrücke

#### 2.6.3.3.1. Prinzip

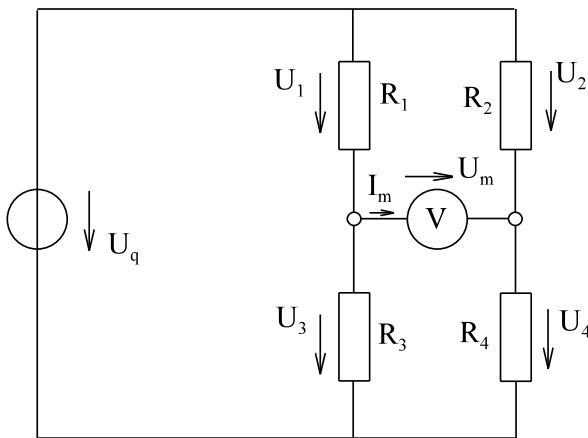


Bild EG26331A: Prinzip der Messbrücke

Bild EG26331A zeigt das Prinzip der Widerstands-Messbrücke. Man kommt mit nur einem Voltmeter aus. Allerdings wird ein veränderlicher Widerstand benötigt.

**Prinzip der Brücke: Die Spannung in der Brücke am Voltmeter  $U_m$  wird durch Abgleich zu Null.**

Wenn die Spannung  $U_m$  zu Null wird, werden die Spannungen  $U_3$  und  $U_4$  sowie die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  gleich, welches durch Maschenumlauf leicht zu beweisen ist (Richtung rechtsrum):

$$U_2 - U_m - U_1 = 0 \quad \text{und} \quad U_m = 0 \quad \Rightarrow \quad U_1 = U_2$$

$$U_m + U_4 - U_3 = 0 \quad \text{und} \quad U_m = 0 \quad \Rightarrow \quad U_3 = U_4$$

Division oberer Gleichungen ergibt:

$$\frac{U_1}{U_3} = \frac{U_2}{U_4}$$

Nach der Spannungs-Teiler-Regel verhalten sich die Spannungen bei  $I_m = 0$  entsprechend der Widerstände:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

oder umgeformt

$$R_1 * R_4 = R_2 * R_3$$



Die Nummerierung der Brückenelemente kann auch in einer anderen Reihenfolge erfolgen. Merken muss man sich folgendes:

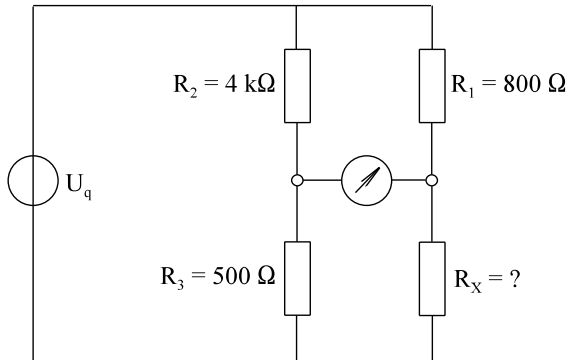
**Bei einer abgeglichenen Brücke ( $U_m=0$ ) ist das Produkt der kreuzweise gegenüberliegenden Widerstände gleich.**

#### Einfluss von $U_q$

Wie groß ist der Einfluss der Spannung  $U_q$ ? Da kein Absolutwert der Spannung gemessen wird, ist auch die absolute Größe von  $U_q$  nicht so entscheidend. Nur wenn  $U_q$  sehr gering wird, ist die Empfindlichkeit beim Nullabgleich geringer.

#### Beispiel 1:

Die dargestellte Messbrücke ist abgeglichen. Bestimmen Sie den Wert  $R_X$



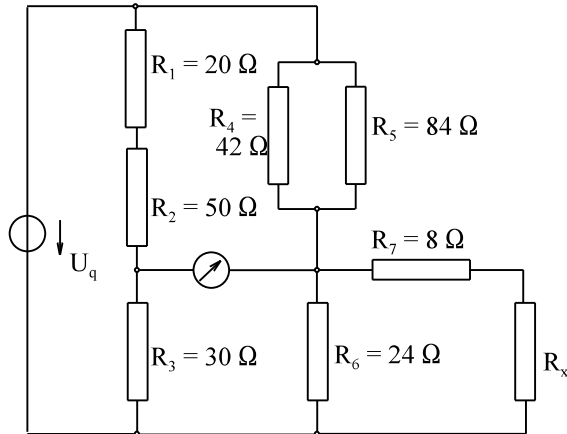
#### Lösungsweg:

$$R_2 \cdot R_X = R_1 \cdot R_3$$

$$R_X = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} = \frac{800\Omega \cdot 500\Omega}{4k\Omega} = 100\Omega$$

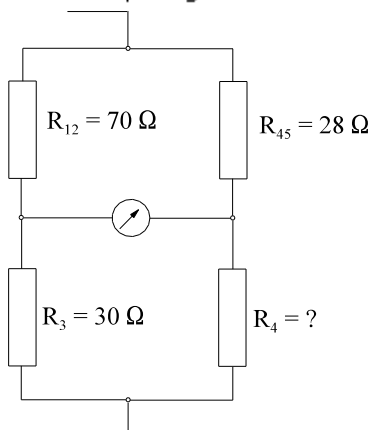
**Beispiel 2:**

Berechnen Sie den Widerstand  $R_x$ , damit die folgende Brücke abgeglichen ist.

**Lösungsweg:**

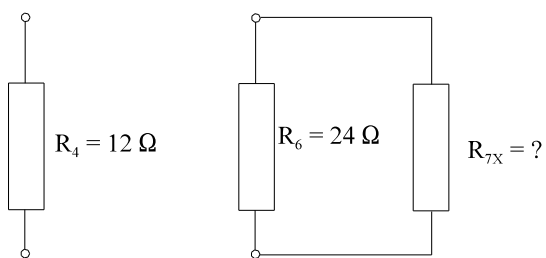
$$R_{12} = R_1 + R_2 = 20 \Omega + 50 \Omega = 70 \Omega$$

$$R_{45} = \frac{R_4 * R_5}{R_4 + R_5} = \frac{42 \Omega * 84 \Omega}{42 \Omega + 84 \Omega} = 28 \Omega$$



$$R_{12} * R_4 = R_{45} * R_3$$

$$R_4 = \frac{R_{45} * R_3}{R_{12}} = \frac{28 \Omega * 30 \Omega}{70 \Omega} = 12 \Omega$$



$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_{7x}}$$

$$\frac{1}{R_{7x}} = \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_6}$$

$$R_{7x} = \frac{1}{\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_6}} = \frac{1}{\frac{1}{12 \Omega} - \frac{1}{24 \Omega}} = 24 \Omega$$

$$R_{7x} = R_7 + R_x$$

$$R_x = R_{7x} - R_7 = 24 \Omega - 8 \Omega = 16 \Omega$$

## 2.6.3.3.2. Messung mit dekadischen Normal-Widerständen

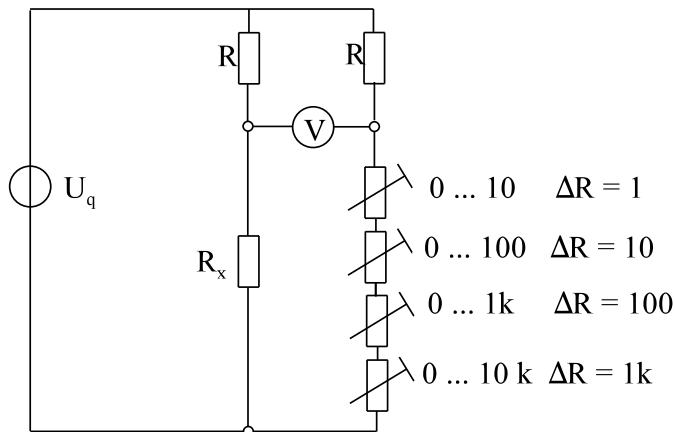


Bild EG26332A

In einem Zweig wird eine Widerstandsdekade nach Bild EG26332A geschaltet. Die stufenweise verstellbaren Widerstände können sich alle vier in einen Gehäuse befinden. Bei Nullabgleich kann der Widerstandswert  $R_x$  an der Dekade direkt abgelesen werden.

## 2.6.3.3.3. Messung mit Potentiometer

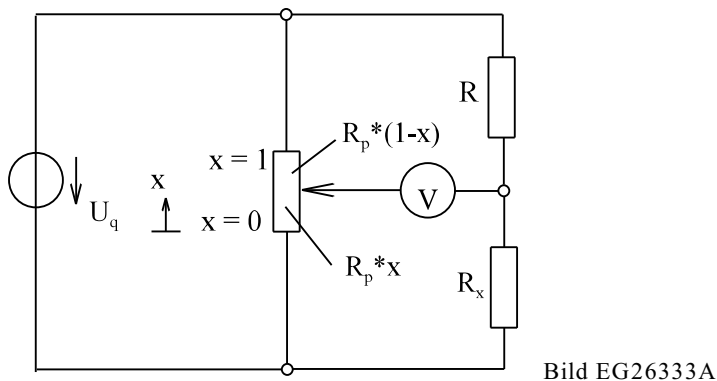


Bild EG26333A

Nach Bild EG26333A wird ein Potentiometer in einem Längszweig einer Brücke geschaltet. Mit Hilfe der Schleiferstellung  $x$  ergeben sich die Widerstände (siehe Kap. 2.5.3)

$$R_p \cdot (1-x)$$

$$R_p \cdot x$$

Die Produkte der gegenüberliegenden Widerstände ergeben:

$$R_p \cdot (1-x) \cdot R_x = R \cdot R_p \cdot x$$

Auflösung nach  $R_x$ :

$$R_x = R \frac{x}{1-x}$$

Die Messbereichsumschaltung ist durch Umschaltung von  $R$  möglich. Die Skala des Potentiometers kann in Ohm kalibriert oder geeicht werden.

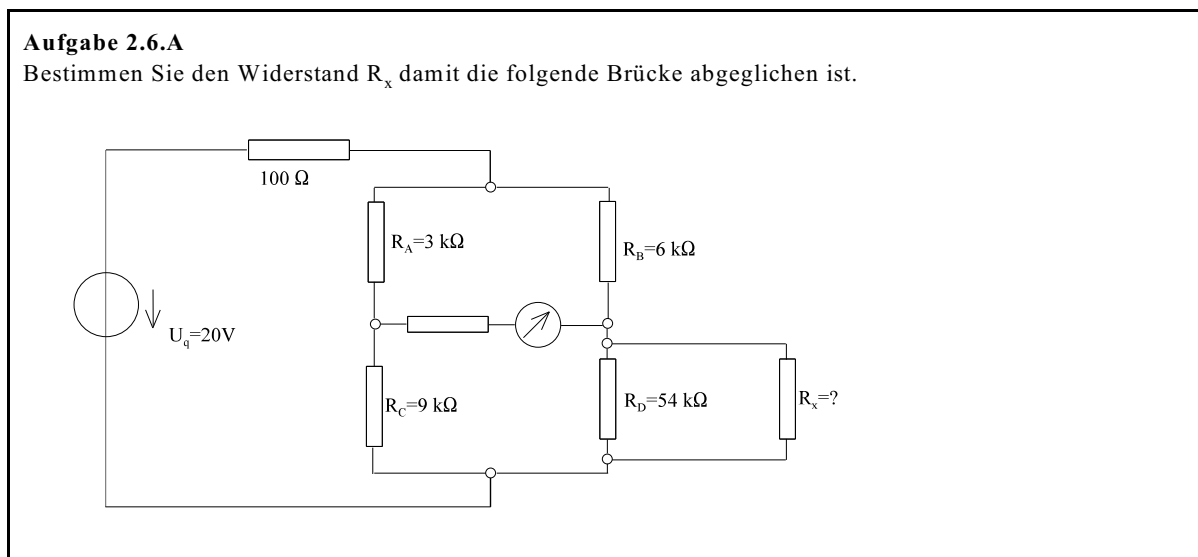
## 2.6.4. Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.6

Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
AF.2.6.A	Beim Zeigermessgerät basiert die Spannungsmessung auf einer Strommessung:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	Beim Zeigermessgerät basiert die Strommessung auf einer Spannungsmessung:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.B	Der Innenwiderstand eines Voltmeters sollte:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* möglichst groß sein. * möglichst klein sein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.C	Der Innenwiderstand eines Amperemeters sollte:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* möglichst groß sein. * möglichst klein sein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.D	Der Innenwiderstand eines idealen Voltmeters ist:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Null * Unendlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.E	Der Innenwiderstand eines idealen Amperemeters sollte ist:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Null * Unendlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.F	Die Messbereichserweiterung erfolgt:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* beim Voltmeter durch Parallelschaltung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* beim Voltmeter durch Reihenschaltung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* beim Amperemeter durch Parallelschaltung * beim Amperemeter durch Reihenschaltung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.G	Das Drehspulmessgerät zeigt an:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* den arithmetischen Mittelwert * den quadratischen Mittelwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* den Effektivwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.H	Das Dreheisenmessgerät zeigt an:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* den arithmetischen Mittelwert * den quadratischen Mittelwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* den Effektivwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.I	Der Effektivwert ist der	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* arithmetische Mittelwert * quadratische Mittelwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.J	Die Skala welches Messgerätes ist linear:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Drehspulmessgerät * Dreheisenmessgerät	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.K	Das Drehspulmessgerät hat:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* positive Ausschläge * negative Ausschläge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* nur positive Ausschläge * positive und negative Ausschläge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.L	Das Dreheisenmessgerät hat:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* positive Ausschläge * negative Ausschläge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* nur positive Ausschläge * positive und negative Ausschläge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.M	Mit einem Zeigermessgerät werden als Ursache gemessen:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Ströme * Spannungen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.N	Widerstände können nach folgenden Methoden gemessen werden:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Strom- und Spannungsmessung * Leistungs- und Temperaturmessung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Direktanzeigende Widerstandsmessgeräte * Widerstandsmessbrücke	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.O	Bei der direkten Widerstandsmessung ist das Messergebnis:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* von der Batteriespannung abhängig * von der Batteriespannung unabhängig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.2.6.P	Bei der Widerstandsbestimmung mit Messbrücke ist das Messergebnis:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* von der Batteriespannung abhängig * von der Batteriespannung unabhängig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
AF.2.6.Q	Die Abgleichbedingung für eine Messbrücke lautet in jedem Fall: * $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$ * $R_1 \cdot R_2 = R_3 \cdot R_4$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.2.6.R	Beim Abgleich einer Brücke wird die Brückenspannung	* maximal * minimal * Null	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Wie lautet die Abgleichbedingung einer Messbrücke:  
**Frage 2.6.A**  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

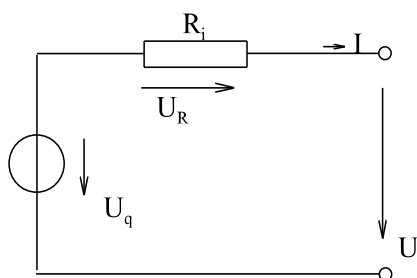
Nach welchen Messprinzipien lässt sich Wert von Widerständen bestimmen:  
**Frage 2.6.B**  
 1. \_\_\_\_\_  
 2. \_\_\_\_\_  
 3. \_\_\_\_\_



## 2.7. Ersatzquellen

### 2.7.1. Ersatz-Spannungsquelle

#### 2.7.1.1. Ersatzschaltbild



Eine Batterie und jede andere Spannungsquelle weist (im Normalfall) mit zunehmender Belastung eine Spannungs-Verringerung an den Klemmen auf. Die Ursache ist der Innenwiderstand  $R_i$  der Quelle. Das ESB der realen Spannungsquelle besteht also aus der Reihenschaltung einer idealen Quelle der Spannung  $U_q$  und dem Innenwiderstand  $R_i$ ; siehe Bild EG2711A.

Bild EG2711A: ESB der realen Spannungsquelle

## 2.7.1.2. Kennlinie der Quelle

Ein Maschenumlauf nach Bild EG2711A ergibt:

$$U_q = U_R + U$$

$$U_q = I \cdot R_i + U$$

$$U = U_q - I \cdot R_i \quad \Rightarrow \quad U = f(I)$$

Die obere Formel gibt die Klemmenspannung  $U$  in Abhängigkeit der Belastung  $I$  an. Dieses ist eine lineare Abhängigkeit, also eine Gerade. Eine Gerade ist entweder gegeben durch:

- einen Punkt und der Steigung oder
- durch zwei Punkte

**1. Möglichkeit:** (1 Punkt plus Steigung)

Ein Punkt der Geraden ist die Belastung Null. Bei  $I = 0$  ist die Klemmenspannung gleich der Quellspannung ( $U = U_q, I = 0$ ). Die Steigung der Geraden

$$\frac{dU}{dI} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = -R_i$$

ist der Wert des negativen Innenwiderstandes. Somit kann die Gerade gezeichnet werden, siehe Bild EG2712A.

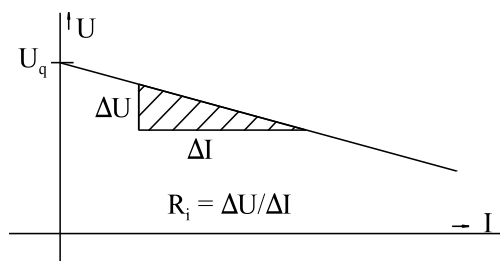


Bild EG2712A: Kennlinie der Spannungsquelle, konstruiert mit der Steigung und einem Punkt

**2. Möglichkeit:** (zwei Punkte)

Eine Gerade ist durch zwei Punkte gegeben. Erster Punkt wie oben:

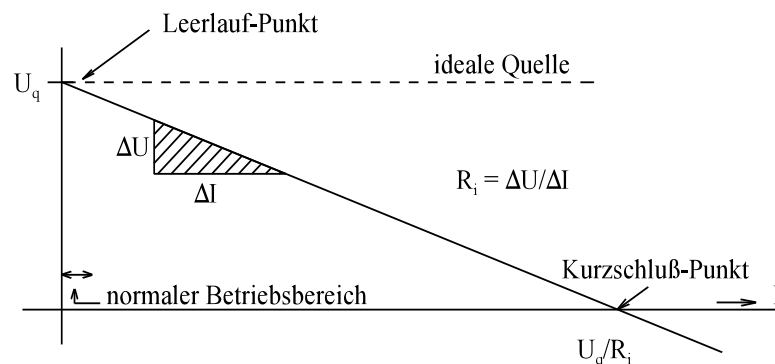
$$U = U_q, I = 0$$

Der zweite Punkt ist beliebig wählbar. Dieser kann z.B. bei Nennstrom gewählt werden. Ein weiterer markanter Punkt ist der Kurzschluss-Punkt. Wird die Quelle kurzgeschlossen fließt der Strom

$$I_k = \frac{U_q}{R_i}$$

Und an der Quelle liegt die Spannung

$$U = 0$$



Auch der zweite Punkt

$$I = \frac{U_q}{R_i}, U = 0$$

wird in ein Diagramm eingetragen, siehe Bild EG2712B:

Bild EG2712B: Kennlinie der Spannungsquelle, konstruiert mit Leerlauf- und Kurzschluss-Punkt

## 2.7.1.3. Grafische U-Bestimmung

Wird ein Widerstand an die Spannungsquelle angeschlossen, stellt sich eine Spannung  $U$  an den Klemmen ein, siehe Bild EG2713A.

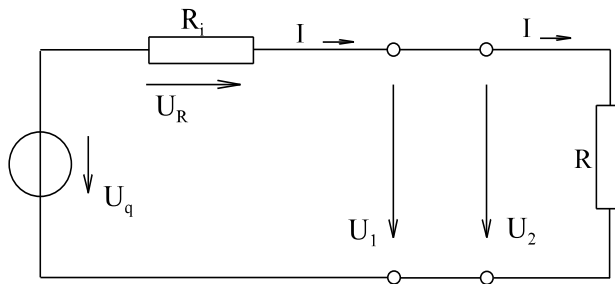


Bild EG2713A

Die linke Seite nach Bild EG2713A hat die Kennlinie

$$U = U_q - I \cdot R_i$$

Die rechte Seite ist das ohmsche Gesetz mit der Kennlinie

$$U = R \cdot I$$

Analytisches Gleichsetzen der Spannungen  $U$  ergibt eine Gleichung für den Strom  $I$ :

$$U_1 = U_2 \quad \Rightarrow \quad U_q - I \cdot R_i = R \cdot I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_q}{R + R_i}$$

Die Möglichkeit die Spannungen  $U$  beider Ausdrücke grafisch gleich zu setzen, ist anschaulicher. Zeichnet man beide oberen Kennlinien in ein Diagramm, ergibt sich ein Schnittpunkt. Dieser wird Arbeitspunkt genannt, siehe Bild EG2713B.

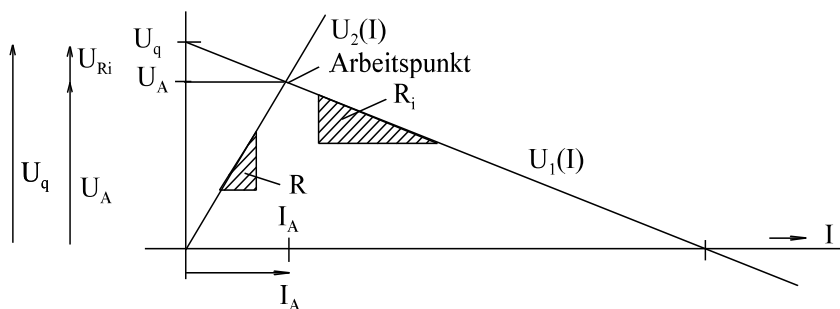


Bild EG2713B: Grafische Bestimmung von elektrischen Größen einer belasteten Spannungsquelle

Nicht nur die Klemmen-Spannung, sondern auch andere elektrische Größen können grafisch bestimmt werden, siehe Bild EG2713B.

Oberes Verfahren ist für lineare Netzwerke nicht ganz so wichtig. Größere Bedeutung haben die grafischen Verfahren bei nichtlinearen Netzwerken (z.B. Diodenkennlinie), siehe Abschnitt 5.2.

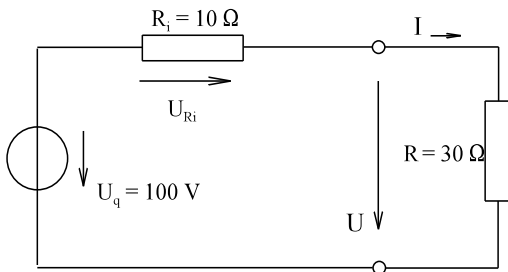
**Beispiel:**

Zeichnen Sie die Kennlinie einer Spannungsquelle mit den Daten  $U_q = 100 \text{ V}$ ,  $R_q = 10 \Omega$  im Maßstab  $10 \text{ V} \triangleq 1 \text{ cm}$ ,  $1 \text{ A} \triangleq 1 \text{ cm}$ . Die Quelle wird mit einem  $R = 30 \Omega$  Widerstand belastet. Zeichnen Sie ein ESB.

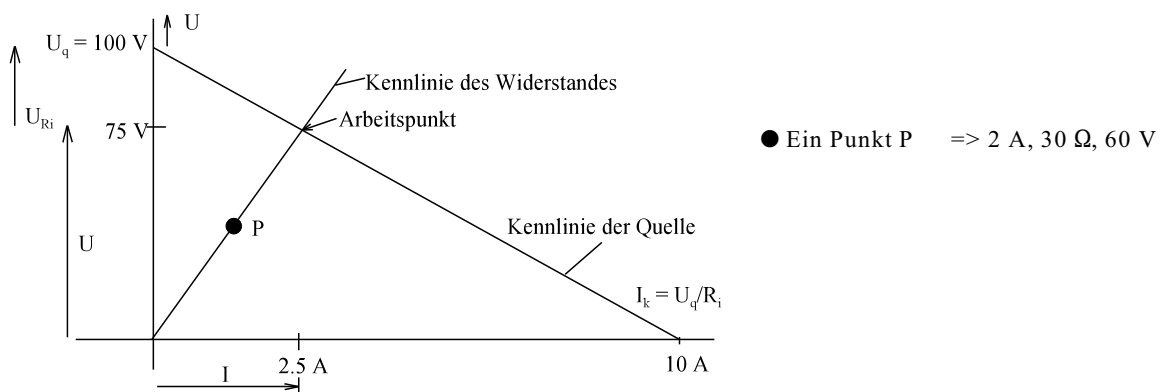
a) Ermitteln Sie Klemmenspannung  $U$  und Strom  $I$  der Quelle grafisch.

a) Ermitteln Sie Klemmenspannung  $U$  und Strom  $I$  der Quelle zur Kontrolle analytisch.

**gegeben:**  $U_q = 100 \text{ V}$        $R_i = 10 \Omega$        $R = 30 \Omega$   
 $10 \text{ V} \triangleq 1 \text{ cm}$        $1 \text{ A} \triangleq 1 \text{ cm}$



**gesucht:**  $I, U, U_{R_i}$   
 Methode: a) grafisch      b) analytisch

**Lösungsweg a) grafisch**

Aus Bild kann abgelesen werden:

$I = 2.5 \text{ A}$        $U = 75 \text{ V}$        $U_{R_i} = 25 \text{ V}$

**Lösungsweg b) analytisch**

Nach der Spannungsteiler-Regel ergibt sich:

$$\frac{U}{U_q} = \frac{R}{R_i + R} = \frac{30 \Omega}{10 \Omega + 30 \Omega} = 0.75$$

$$U = 0.75 \cdot U_q = 0.75 \cdot 100 \text{ V} = 75 \text{ V}$$



## 2.7.2. Ersatz-Stromquelle

### 2.7.2.1. Ersatzschaltbild

Das Verständnis der physikalischen Anschauung der Stromquelle ist schwieriger als das der Spannungsquelle. Eine technische Stromquelle ist mit Verstärkern (z.B. Transistoren oder Operationsverstärkern) realisierbar. Das ESB einer Stromquelle zeigt Bild EG2721A.

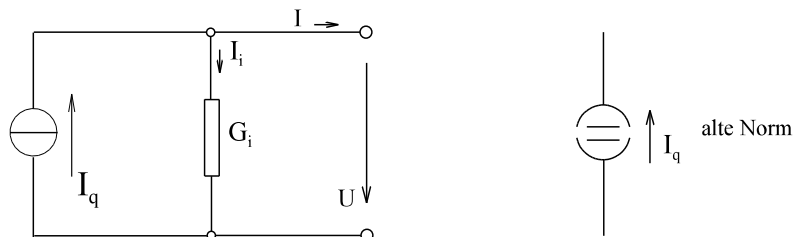


Bild EG2721A: ESB einer realen Stromquelle

Das ESB einer Stromquelle besteht aus der idealen Stromquelle mit dem konstanten Wert  $I_q$ . Der Innenwiderstand wird als Leitwert  $G_i$ , nicht in Reihe, sondern parallel angegeben. Die Stromquelle wird (zur Unterscheidung mit der Spannungsquelle) mit zwei offenen Halbkreisen dargestellt.

### 2.7.2.2. Kennlinie

Aus Bild EG2721A ergibt sich aus der Knotensumme:

$$I_q = I_i + I$$

$$I_i = U \cdot G_i$$

$$I_q = U \cdot G_i + I$$

$$I = I_q - U \cdot G_i$$

Obere Kennlinie der Stromquelle sieht wieder nach einer Geradengleichung aus. Bestimmung in diesem Fall durch zwei Punkte

$$U = 0 \quad (\text{Kurzschluss}) \quad \Rightarrow \quad I = I_q \quad I_i = 0$$

$$I = 0 \quad (\text{Leerlauf}) \quad \Rightarrow \quad U = I_q / G_i \quad I_i = I_q$$

Beide Punkte in ein Diagramm eingetragen und zur Geraden verbunden ergibt Bild EG2722A.

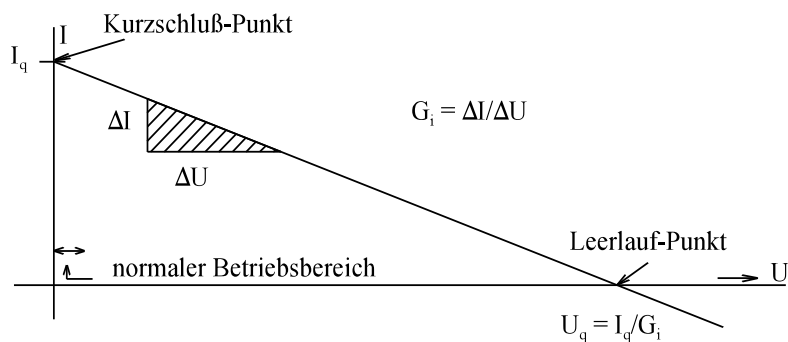
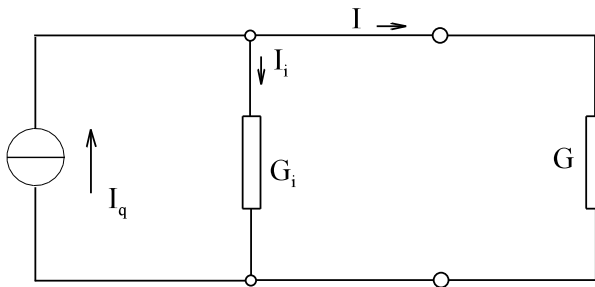


Bild EG2722A: Kennlinie der Stromquelle

## 2.7.2.3. Belastete Stromquelle



Bei der Spannungsquelle war der größte Spannungsabfall an der Last. Bei der Stromquelle soll im normalen Betriebsbereich der größte Stromanteil von  $I_q$  sich auf die Last  $G$  aufteilen. Da die Ströme entsprechend der Leitwerte sich aufteilen, wird verlangt, dass  $G$  sehr viel größer ist als der Innenteilwert  $G_i$ .

Bild EG2723A

**Der Innenleitwert der Stromquelle soll sehr viel kleiner sein als die Leitwerte der Last. Beim Kehrwert Widerstand ist das Verhältnis umgekehrt: Der Innenwiderstand einer Stromquelle soll sehr viel größer sein als der Widerstand der Last.**

Eine theoretische Realisierbarkeit einer Stromquelle: Eine Spannungsquelle mit hoher Spannung und hohem Innenwiderstand wirkt als Stromquelle. Dieses wird aber praktisch nach dieser Art kaum verwirklicht.

## 2.7.3. Umrechnung zwischen Ersatz- Strom- und Spannungsquelle

Aus dem Vergleich der Bilder EG2712B und EG2722A ergeben sich gewisse Gemeinsamkeiten zwischen Ersatz-Strom- und Ersatz-Spannungsquelle: Beides sind Geraden mit positiven Funktionswerte bei Null und mit negativer Steigung. Die Steigung ist jeweils der Innenwiderstand bzw. Innenleitwert. Durch Vertauschen der Achsen von  $U$  und  $I$  bei einer der Kennlinien, könnten beide Kennlinien identisch sein, siehe Bild EG273A.

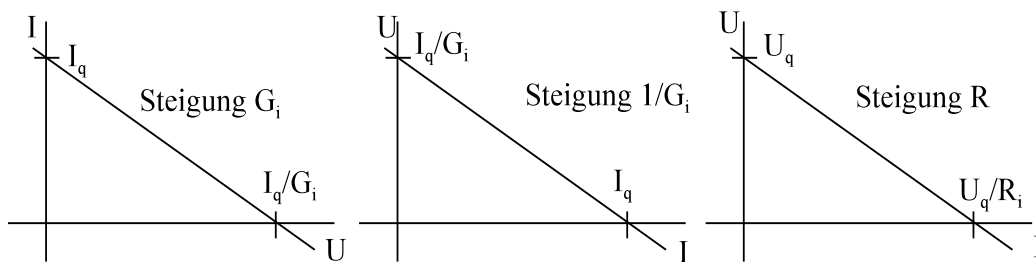


Bild EG273A: a) bekannte Kennlinie der Stromquelle  
b) achsenvertauschte Kennlinie der Stromquelle  
c) Kennlinie der Spannungsquelle

Nur die Parameter der Quellen müssen einander angepasst werden. Der Unterschied in den Kennlinien ist der normale Betriebsbereich. Mathematisch aber sind die Kennlinien gleich. Daraus ergibt sich, dass es möglich ist, die eine Form in die andere umzurechnen. Dazu werden beide Kennlinien miteinander verglichen:

Spannungsquelle

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

Stromquelle

$$I = I_q - G_i \cdot U$$

$$U = \frac{I_q}{G_i} - \frac{I}{G_i}$$

Damit beide Kennlinien gleich sind, müssen sowohl der konstante Anteil, sowie auch der lineare Anteil gleich sein:

$$U_q = \frac{I_q}{G_i}$$

$$R_i \cdot I = \frac{I}{G_i}$$

$$\Rightarrow R_i = \frac{1}{G_i}$$

Damit folgt als Ergebnis der Umwandlung von einer Strom- in eine Spannungsquelle und umgekehrt:

**Der Innenwiderstand von Strom- und Spannungsquelle ist gleich. Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom lassen sich mit Hilfe des ohmschen Gesetzes an  $R_i$  berechnen:**

$$U_q = I_q \cdot R_i$$

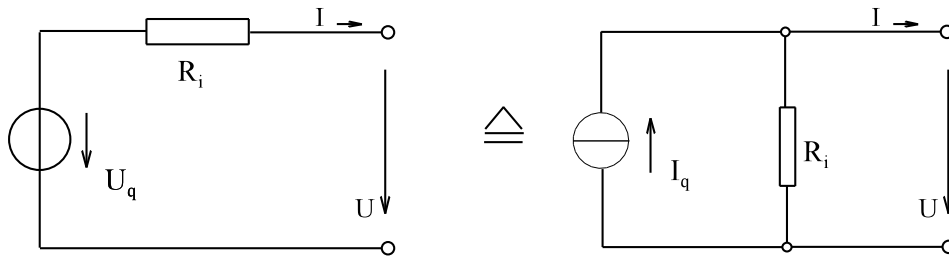
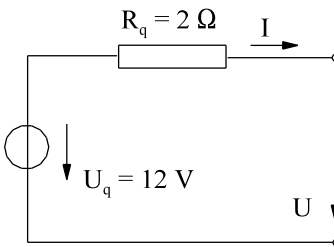
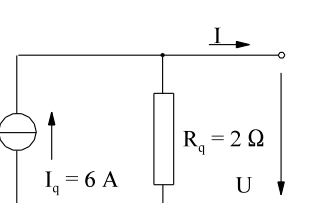
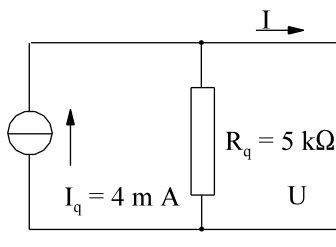
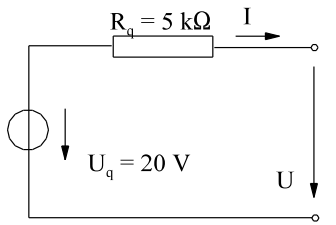


Bild EG273B

$$U_q = R_i \cdot I_q$$

<p><b>Beispiel 1:</b> Die Spannungsquelle ist in eine Stromquelle zu wandeln.</p>  <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p><b>Lösung:</b></p> $I_q = \frac{U_q}{R_q} = \frac{12V}{2\Omega} = 6A$ 	<p><b>Beispiel 2:</b> Die Stromquelle ist in eine Spannungsquelle zu wandeln.</p>  <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p><b>Lösung:</b></p> $U_q = R_q \cdot I_q = 4 \text{ mA} \cdot 5 \text{ k}\Omega = 20 \text{ V}$ 
---	--

### 2.7.4. Geregeltes Netzteil

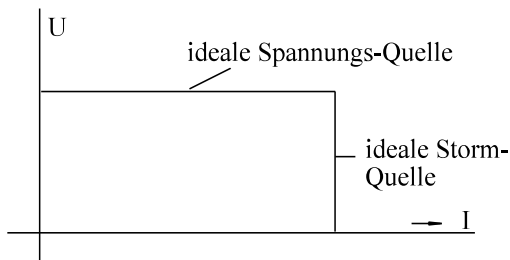


Bild EG274

Die Kennlinie eines geregelten Netzteiles zeigt Bild EG274A. Je nach Last wird entweder die Spannung konstant gehalten oder der Strom.

Aufgrund der Regelung ist die Steigung (z.B. der Spannungsquelle fast Null) die einer idealen Quelle. Je nach Last kann mit einer idealen Spannungs- oder Stromquelle gerechnet werden.

## 2.7.5. Aufgaben und Fragen zu Abschnitt 2.7

Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
<b>AF.2.7.A</b>	Ein Spannungsquelle weist eine Kennlinie $U = f(I)$ mit folgenden Eigenschaften auf: * Kennlinie ist eine Gerade. * Kennlinie ist eine Parabel. * Die Steigung der Kennlinie ist konstant. * Die Steigung der Kennlinie ist nimmt mit dem Belastungsstrom zu. * Die Steigung der Kennlinie ist nimmt mit dem Belastungsstrom ab. * Die Steigung der Kennlinie entspricht dem positiven Innenwiderstand $R_q$ . * Die Steigung der Kennlinie entspricht dem negativen Innenwiderstand $R_q$ . * Die Steigung der Kennlinie entspricht dem negativen Innenleitwert $G_q$ . * Die Steigung der Kennlinie entspricht dem positiven Innenleitwert $G_q$ . * Die Kennlinie verläuft durch Null. * Die Kennlinie verläuft nicht durch Null.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.7.B</b>	Ein Stromquelle weist eine Kennlinie $I = f(U)$ mit folgenden Eigenschaften auf: * Kennlinie ist eine Gerade. * Kennlinie ist eine Parabel. * Die Steigung der Kennlinie ist konstant. * Die Steigung der Kennlinie ist nimmt mit der Spannung zu. * Die Steigung der Kennlinie ist nimmt mit der Spannung ab. * Die Steigung der Kennlinie entspricht dem positiven Innenwiderstand $R_q$ . * Die Steigung der Kennlinie entspricht dem negativen Innenwiderstand $R_q$ . * Die Steigung der Kennlinie entspricht dem negativen Innenleitwert $G_q$ . * Die Steigung der Kennlinie entspricht dem positiven Innenleitwert $G_q$ . * Die Kennlinie verläuft durch Null. * Die Kennlinie verläuft nicht durch Null.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.7.C</b>	Eine Spannungsquelle wird i.A. nahe dem Kurzschluss betrieben. Eine Spannungsquelle wird i.A. nahe dem Leerlauf betrieben. Eine Stromquelle wird i.A. nahe dem Kurzschluss betrieben. Eine Stromquelle wird i.A. nahe dem Leerlauf betrieben.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.7.D</b>	Bei der Wandlung von einer realen Strom- in eine reale Spannungsquelle wird: <ul style="list-style-type: none"> <li>* aus der Parallelschaltung <math>I_q, R_q</math> eine Parallelschaltung <math>U_q, R_q</math></li> <li>* aus der Reihenschaltung <math>I_q, R_q</math> eine Reihenschaltung <math>U_q, R_q</math></li> <li>* aus der Reihenschaltung <math>I_q, R_q</math> eine Parallelschaltung <math>U_q, R_q</math></li> <li>* aus der Parallelschaltung <math>I_q, R_q</math> eine Reihenschaltung <math>U_q, R_q</math></li> </ul>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.7.E</b>	Bei der Wandlung von einer realen Spannungs- in eine reale Stromquelle wird: <ul style="list-style-type: none"> <li>* aus der Parallelschaltung <math>U_q, R_q</math> eine Parallelschaltung <math>I_q, R_q</math></li> <li>* aus der Reihenschaltung <math>U_q, R_q</math> eine Reihenschaltung <math>I_q, R_q</math></li> <li>* aus der Reihenschaltung <math>U_q, R_q</math> eine Parallelschaltung <math>I_q, R_q</math></li> <li>* aus der Parallelschaltung <math>U_q, R_q</math> eine Reihenschaltung <math>I_q, R_q</math></li> </ul>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.7.F</b>	Bei der Wandlung von einer realen Strom- in eine reale Spannungsquelle: <ul style="list-style-type: none"> <li>* bleibt die Richtung von <math>I_q</math> und <math>U_q</math> gleich</li> <li>* ist die Richtung von <math>I_q</math> und <math>U_q</math> entgegengesetzt</li> </ul>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.2.7.G</b>	Bei Wandlung von realen Strom- und Spannungsquellen werden die Werte wie folgt umgerechnet: $U_q = R_q * I_q / 2$ $U_q = R_q * I_q$ $U_q = 2 * R_q * I_q$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

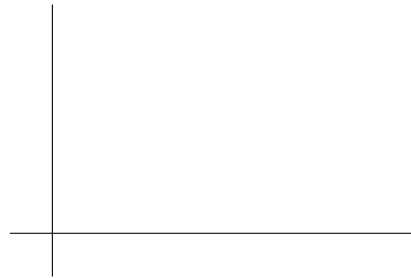
**Frage 2.7.A** Skizzieren Sie die Kennlinie einer realen Spannungsquelle. Kennzeichnen Sie den normalen Arbeitsbereich (n. A.).



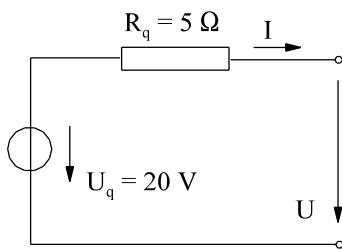
**Frage 2.7.B** Skizzieren Sie die Kennlinie einer realen Stromquelle. Kennzeichnen Sie den normalen Arbeitsbereich (n. A.).



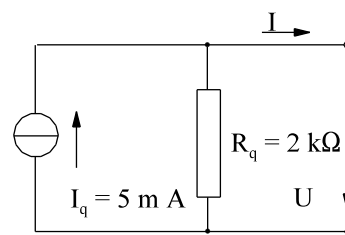
**Frage 2.7.C** Skizzieren Sie die Kennlinie eines Netzteils.



**Aufgabe 2.7.A:** Die Spannungsquelle ist in eine Stromquelle zu wandeln.



**Aufgabe 2.7.B:** Die Stromquelle ist in eine Spannungsquelle zu wandeln.



**Aufgabe 2.7.C:**

Zeichnen Sie die Kennlinie einer Spannungsquelle mit den Daten  $U_q = 5 \text{ V}$ ,  $R_q = 50 \text{ Ohm}$  im Maßstab  $1 \text{ V} \triangleq 2 \text{ cm}$ ,  $2 \text{ mA} \triangleq 1 \text{ cm}$ . Die Quelle wird mit einem  $R = 200 \text{ Ohm}$  Widerstand belastet. Zeichnen Sie ein ESB. Ermitteln Sie Klemmenspannung  $U$  und Strom  $I$  der Quelle grafisch.

**Aufgabe 2.7.D:**

Zeichnen Sie die Kennlinie einer Stromquelle  $I = f(U)$  mit den Daten  $I_q = 10 \text{ mA}$ ,  $R_q = 2 \text{ kOhm}$  im Maßstab  $1 \text{ V} \triangleq 2 \text{ cm}$ ,  $1 \text{ mA} \triangleq 1 \text{ cm}$ . Die Quelle wird mit einem  $R = 500 \text{ Ohm}$  Widerstand belastet. Zeichnen Sie ein ESB. Ermitteln Sie Klemmenspannung  $U$  und Strom  $I$  der Quelle grafisch.

3. Berechnung linearer Gleichstrom-Netze	75
3.1. Einleitung	75
3.1.1. Allgemeines	75
3.1.2. Begriffe	75
3.1.3. Normierung	76
3.1.4. Beispielnetze	77
3.1.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.1	82
3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze	83
3.2.1. Methode	83
3.2.2. Berechnung des Beispiel-Netzwerkes	85
3.2.3. Zusammenfassung	89
3.2.4. Beispiele zu Knoten und Maschenanalyse	90
3.2.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.2	91
3.3. Maschenstrom-Verfahren	94
3.3.1. Einführung von Maschenströmen	94
3.3.2. Schema zum Maschenstrom-Verfahren	97
3.3.3. Beispiele zum Maschenstromverfahren	98
3.3.4. Maschenstrom-Verfahren für Rechner	100
3.3.4.1. Allgemeine Herleitung	100
3.3.4.2. Herleitung am Beispiel	104
3.3.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.3	109
3.4. Netz-Umwandlung	111
3.4.1. Ersatzwiderstand	111
3.4.2. Quellenumwandlung	112
3.4.2.1. Umwandlung Strom- und Spannungsquellen	112
3.4.2.2. Reihenschaltung idealer Spannungsquellen	112
3.4.2.3. Parallelschaltung idealer Stromquellen	112
3.4.2.4. Beispiele zur Umwandlung Strom- und Spannungsquellen	113
3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung	115
3.4.3.1. Vorbetrachtung	115
3.4.3.2. Dreieck-Stern-Umwandlung	116
3.4.3.3. Stern-Dreieck-Umwandlung	119
3.4.4. Verlegung idealer Strom-Quellen	121
3.4.5. Umwandlung idealer Quellen	122
3.4.5.1. Umwandlung idealer Spannungsquellen	122
3.4.5.2. Umwandlung idealer Stromquellen	122
3.4.6. Aufgaben zu Abschnitt 3.4	124
3.5. Überlagerungssatz	126
3.5.1. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.5	128
3.6. Ersatzquelle	129
3.6.1. Mathematische Theorie	129
3.6.2. Physikalische Theorie	131
3.6.3. Schema zu Ersatz-Spannungsquelle	132
3.6.4. Beispiele und Aufgaben	132
3.7. Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren	135
3.7.1. Einführung von Knotenpunkt-Potenzialen	135
3.7.2. Ableitung des Knotenpunkt- Potenzial-Verfahrens am Beispiel	136
3.7.3. Schema zum manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren	137
3.7.4. Knotenpunkt-Potenzial-Verfahrens für Rechner	140
3.7.4.1. Mathematische Herleitung	140
3.7.4.2. Physikalische Herleitung am Beispiel	142
3.7.4.3. Auswertung der Formeln	144
3.7.5. Schema zum Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren für Rechner	145
3.7.6. Fragen und Aufgaben	147
3.8. Tricks bei Netzwerksberechnungen	150
3.8.1. Symmetrie-Überlegungen	150
3.8.2. Netzwerkentkopplung durch ideale Spannungsquellen	151
3.8.3. Netzwerkentkopplung durch ideale Stromquellen	154

3.8.4. Aufgaben zu Abschnitt 3.8 .....	156
3.9. Zusammenfassung der Verfahren für lineare Netzwerke .....	159

## 3. Berechnung linearer Gleichstrom-Netze

### 3.1. Einleitung

#### 3.1.1. Allgemeines

Bislang wurden Stromkreise mit nur einer Spannungsquelle untersucht. Sind mehrere Spannungsquellen und mehrere Maschen im Netzwerk enthalten, wird die Berechnung etwas komplizierter. Sind nur normale lineare Widerstände im Netzwerk enthalten, ist die Aufgabe vorhanden ein lineares elektrisches Gleichstrom-Netz zu berechnen. Im Rahmen dieses Kapitels werden verschiedene Berechnungs-Methoden vorgestellt. Die meisten Methoden sollen anhand des Beispiel-Netzwerkes A nach Bild EG31A erläutert werden.

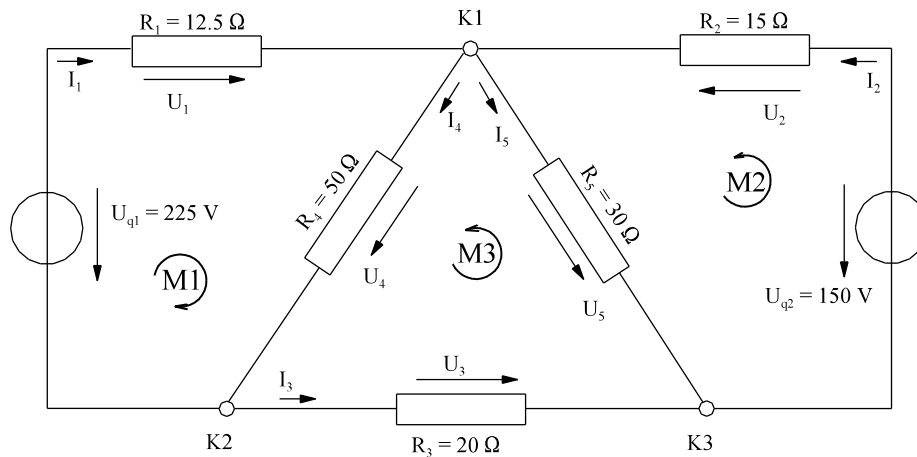


Bild EG311A: Beispiel-Netzwerk A

Das Problem nach Bild EG31A ist, die unbekanntenen Ströme  $I_1$  bis  $I_5$

und die unbekanntenen Spannungen  $U_1$  bis  $U_5$

zu berechnen. In diesem Kapitel 3 werden verschiedene Methoden zur Berechnung linearer Netzwerke vorgestellt. Diese Methoden kann man grob einteilen in:

- Aufstellen von linearen Gleichungssystemen für die gesuchten Größen (3 Verfahren)
- Netz-Umformungen: Ähnlich der Methode Ersatzwiderstand, gibt es noch mehrere Methoden, die sich auch ergänzen; hier müssen dann teilweise mehrere Methoden nacheinander angewandt werden.

#### 3.1.2. Begriffe

Ein elektrisches Netzwerk besteht aus mehreren Zweigen, die verschiedene Maschen bilden. Am Ende der Zweige ist jeweils ein Knoten.

**Knoten:** Der Knoten ist die Verbindung von mindestens zwei, meistens aber mehr als zwei, Enden von Zweigen.

**Zweig:** Ein Zweig ist die Verbindung zwischen zwei Knoten. Der Zweig kann, muss aber nicht, auch Quellen (Strom, Spannung) enthalten.

**Masche:** Die Masche ist ein geschlossener Umlauf in einem Netzwerk.

**Definition:**  
 $z$  - Anzahl der Zweige  
 $k$  - Anzahl der Knoten  
 $m$  - Anzahl der Maschen

**Achtung:** Eine leitende Verbindung zwischen Knoten wird als ein Knoten gezählt, siehe Bild EG312A.

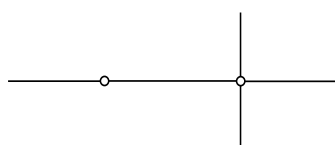


Bild EG312A: Ein Knoten auseinander gezogen



### 3.1.3. Normierung

Im Vorgriff auf die weiteren Unterkapitel, wo viel numerisches Rechnen erforderlich ist, soll eine Normierung durchgeführt werden. Bei physikalischen Größen-Gleichungen muss jeweils mit Zahlenwert und Einheit gerechnet werden. Da dieses der Computer nicht ohne weiteres kann, muss mit dimensionslosen Größen gerechnet werden. Dieses ist mit Hilfe von zugeschnittenen Größen-Gleichungen möglich. Die Normierung soll anhand des ohmschen Gesetzes erläutert werden:

$$U = R * I$$

Die zugehörige Einheiten-Gleichung ist:

$$1V = 1\Omega * 1A$$

Die Division beider oberen Gleichungen ergibt:

$$\frac{U}{1V} = \frac{R}{1\Omega} * \frac{I}{1A}$$

Mit den Abkürzungen

$$U_{\text{Norm}} = 1V$$

$$I_{\text{Norm}} = 1A$$

$$R_{\text{Norm}} = 1\Omega$$

lässt sich die Einheiten-Gleichung schreiben als

$$U_{\text{Norm}} = I_{\text{Norm}} * R_{\text{Norm}}$$

Die Division des ohmschen Gesetzes durch die normierte Einheitengleichung ergibt

$$\frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{R}{R_{\text{Norm}}} * \frac{I}{I_{\text{Norm}}}$$

Mit der Abkürzung der normierten Größen

$$U^N = \frac{U}{U_{\text{Norm}}} \quad I^N = \frac{I}{I_{\text{Norm}}} \quad R^N = \frac{R}{R_{\text{Norm}}}$$

lässt sich das ohmsche Gesetz auch schreiben mit dimensionslosen Größen:

$$U^N = R^N * I^N$$

$$[U^N] = [R^N] = [I^N] = 1$$

Es gibt verschiedene Schreibweisen für die normierte Größen und für den Normierungswert. Sternchen und Strich-Schreibweisen sind auch üblich. Index oder den Index hochschreiben findet man auch. Konvention hier:

normierte Größen (z.B.  $U^N$ )  $\Rightarrow$  Index "N" hoch  $[U^N] = 1$

Normierungs-Wert (z.B.  $U_{\text{Norm}}$ )  $\Rightarrow$  Index "Norm" tief  $[U_{\text{Norm}}] = V$

Es ist nicht erforderlich auf SI-Grundeinheiten zu normieren. Es kann auch dekadischen Vielfache oder aber auch auf "krumme" Vielfache der SI-Einheiten normiert werden, dazu zwei Beispiele.

#### Beispiel 1:

**gegeben:**  $U_{\text{Norm}} = 1 \text{ kV}$ ,  $I_{\text{Norm}} = 1 \text{ mA}$

**gesucht:**  $R_{\text{Norm}}$

$R_{\text{Norm}}$  ist im Prinzip noch frei wählbar, kann aber auch nach dem ohmschen Gesetz gewählt werden:

$$R_{\text{Norm}} = \frac{U_{\text{Norm}}}{I_{\text{Norm}}} = \frac{1 \text{ kV}}{1 \text{ mA}} = 10^6 \Omega = 1 \text{ M}\Omega \quad U_{\text{Norm}} = R_{\text{Norm}} * I_{\text{Norm}}$$

Das ohmsche Gesetz dividiert durch die obere Gleichung ergibt:

$$\frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{R}{R_{\text{Norm}}} * \frac{I}{I_{\text{Norm}}}$$

obere mit den normierten Größen

$$U^N = \frac{U}{U_{\text{Norm}}} \quad I^N = \frac{I}{I_{\text{Norm}}} \quad R^N = \frac{R}{R_{\text{Norm}}}$$

lässt sich schreiben:

$$U^N = R^N * I^N$$

**Beispiel 2:**

**gegeben:**  $U_{\text{Norm}} = 100 \text{ V}$ ,  $I_{\text{Norm}} = 5 \text{ A}$ ,  $R_{\text{Norm}} = 10 \Omega$   
**gesucht:** normiertes ohmsches Gesetz

Wenn aus irgend einem Grund, z.B. schon alle Nenngrößen (als Beispiel alle Nenngrößen des ohmschen Gesetzes) vorgegeben sind, ist die Normierung auch möglich. Es muss nur ein Zusammenhang zwischen den Normierungs-Größen gefunden werden. Die Gleichung:

$$\frac{U_{\text{Norm}}}{I_{\text{Norm}} * R_{\text{Norm}}} = C \qquad U_{\text{Norm}} = C * I_{\text{Norm}} * R_{\text{Norm}}$$

$$\frac{U_{\text{Norm}}}{I_{\text{Norm}} * R_{\text{Norm}}} = \frac{100 \text{ V}}{5 \text{ A} * 10 \Omega} = 2 \qquad U_{\text{Norm}} = R_{\text{Norm}} * I_{\text{Norm}} * 2$$

Division des ohmschen Gesetzes durch die obere Gleichung ergibt:

$$\frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{R}{R_{\text{Norm}}} * \frac{I}{I_{\text{Norm}}} * \frac{1}{2}$$

$$U^N = \frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{U}{100 \text{ V}} \qquad I^N = \frac{I}{I_{\text{Norm}}} = \frac{I}{5 \text{ A}} \qquad R^N = \frac{R}{R_{\text{Norm}}} = \frac{R}{10 \Omega}$$

in diesen Fall das ohmsche Gesetz in normierter Form:

$$U^N = \frac{1}{2} * R^N * I^N$$

**Beispiel 3:**

**gegeben:**  $U_{\text{Norm}} = 20 \text{ V}$ ,  $I_{\text{Norm}} = 5 \text{ A}$ ,  $R_{\text{Norm}} = 1 \Omega$   
**gesucht:** normiertes ohmsches Gesetz

**Lösung:**

$$U = I * R$$

$$\frac{U_{\text{Norm}}}{I_{\text{Norm}} * R_{\text{Norm}}} = 4 \qquad U_{\text{Norm}} = R_{\text{Norm}} * I_{\text{Norm}} * 4$$

$$\frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{I}{I_{\text{Norm}}} * \frac{R}{R_{\text{Norm}}} * \frac{1}{4}$$

$$U^N = I^N * R^N * \frac{1}{4}$$

**Beispiel 4:**

**gegeben:**  $U = 80 \text{ V}$   $R = 20 \Omega$   $U_{\text{Norm}} = 20 \text{ V}$ ,  $I_{\text{Norm}} = 2 \text{ A}$ ,  $R_{\text{Norm}} = 10 \Omega$   
**gesucht:**  $I$  mit Hilfe normierter Berechnung

**A) normierte Gleichung aufstellen**

hier einfach, es gilt:  $U_{\text{Norm}} = R_{\text{Norm}} * I_{\text{Norm}} \Rightarrow U^N = R^N * I^N$

**B) Normierung**

$$U^N = \frac{U}{U_{\text{Norm}}} = \frac{80 \text{ V}}{20 \text{ V}} = 4 \qquad R^N = \frac{R}{R_{\text{Norm}}} = \frac{20 \Omega}{10 \Omega} = 2$$

**C) Berechnung**

$$I^N = \frac{U^N}{R^N} = \frac{4}{2} = 2$$

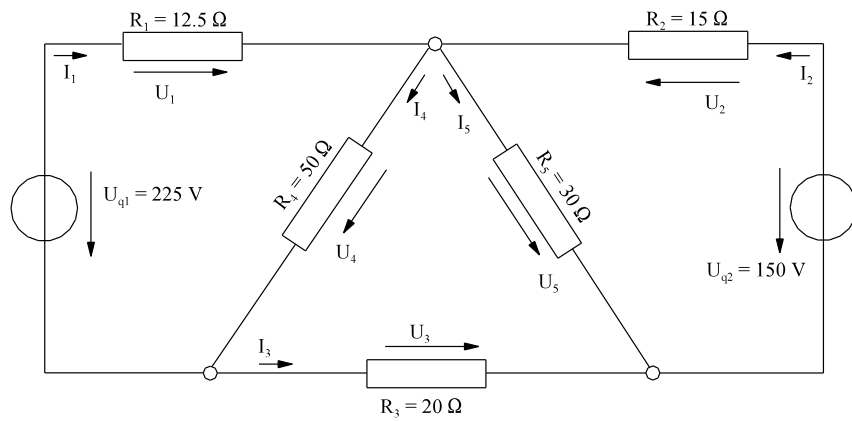
**D) Entnormierung**

$$I = I_{\text{Norm}} * I^N = 2 \text{ A} * 2 = 4 \text{ A}$$

### 3.1.4. Beispielnetze

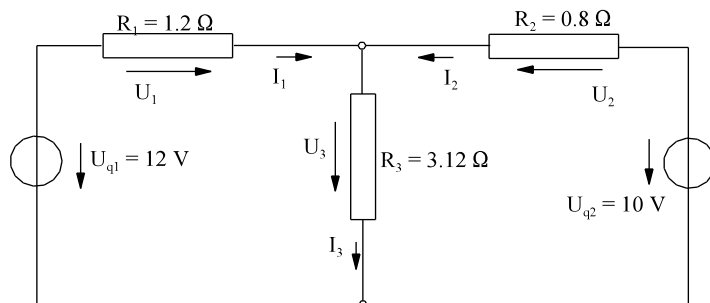
In den Abschnitten 3.2 bis 3.8 werden Verfahren zur Berechnung elektrischer Netzwerke vorgestellt. In diesem Abschnitt sind 15 Beispielnetze (A bis O) dargestellt, die mit verschiedenen Methoden berechnet werden sollen.

**Netzwerk 3A**



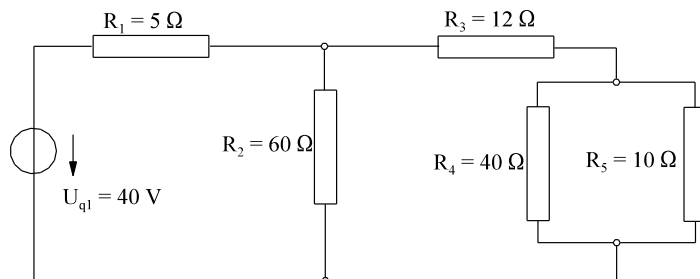
- $U_1 = 65 \text{ V}$
- $U_2 = 30 \text{ V}$
- $U_3 = -40 \text{ V}$
- $U_4 = 160 \text{ V}$
- $U_5 = 120 \text{ V}$
- $I_1 = 5.2 \text{ A}$
- $I_2 = 2 \text{ A}$
- $I_3 = -2 \text{ A}$
- $I_4 = 3.2 \text{ A}$
- $I_5 = 4 \text{ A}$

**Netzwerk 3B**



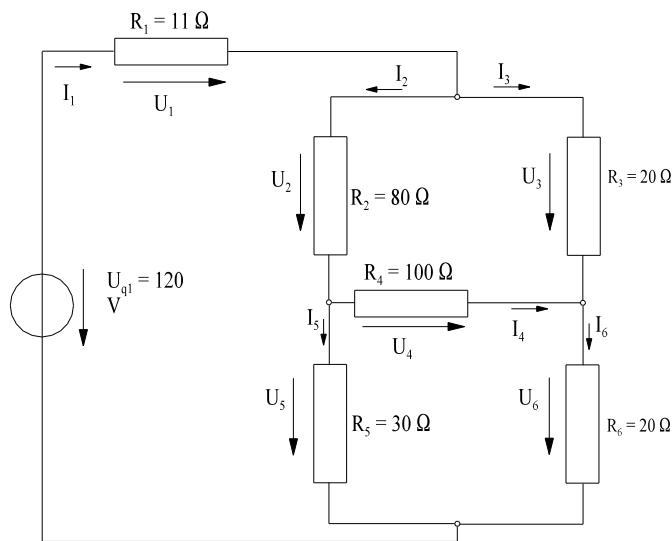
- $U_1 = 2.64 \text{ V}$
- $U_2 = 0.64 \text{ V}$
- $U_3 = 9.36 \text{ V}$
- $I_1 = 2.2 \text{ A}$
- $I_2 = 0.8 \text{ A}$
- $I_3 = 3 \text{ A}$

**Netzwerk 3C**

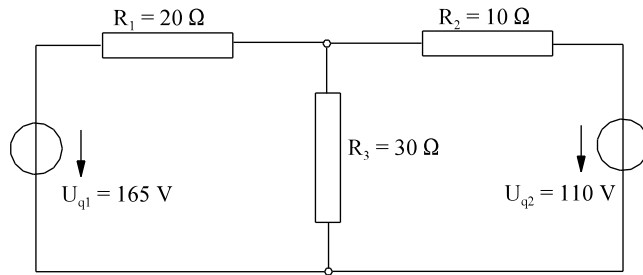


- $U_1 = 10 \text{ V}$
- $U_2 = 30 \text{ V}$
- $U_3 = 18 \text{ V}$
- $U_4 = 12 \text{ V}$
- $U_5 = 12 \text{ V}$
- $I_1 = 2 \text{ A}$
- $I_2 = 0.5 \text{ A}$
- $I_3 = 1.5 \text{ A}$
- $I_4 = 0.3 \text{ A}$
- $I_5 = 1.2 \text{ A}$

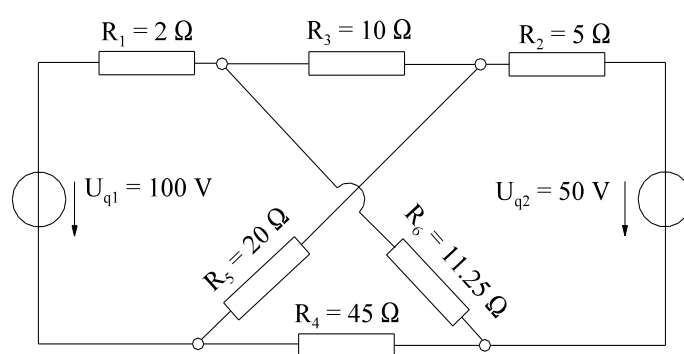
**Netzwerk 3D**



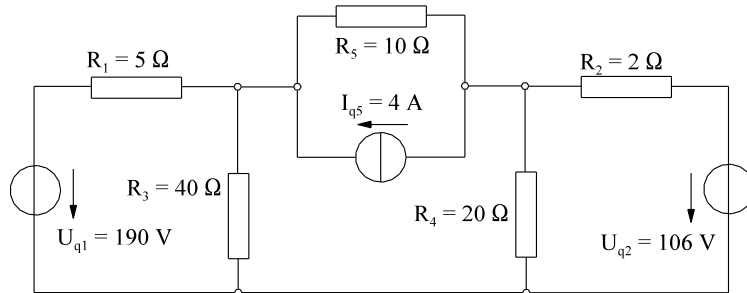
- $U_1 = 33 \text{ V}$
- $U_2 = 60 \text{ V}$
- $U_3 = 45 \text{ V}$
- $U_4 = -15 \text{ V}$
- $U_5 = 27 \text{ V}$
- $U_6 = 42 \text{ V}$
- $I_1 = 3 \text{ A}$
- $I_2 = 0.75 \text{ A}$
- $I_3 = 2.25 \text{ A}$
- $I_4 = -0.15 \text{ A}$
- $I_5 = 0.9 \text{ A}$
- $I_6 = 2.1 \text{ V}$

**Netzwerk 3E**

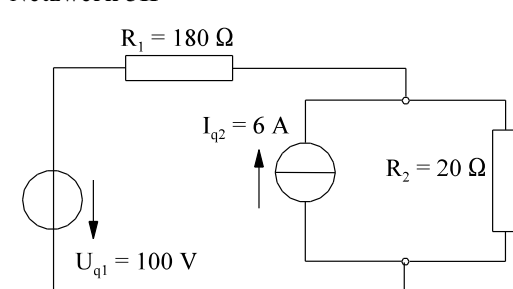
$$\begin{aligned} U_1 &= 60 \text{ V} \\ U_2 &= 5 \text{ V} \\ U_3 &= 105 \text{ V} \\ I_1 &= 3 \text{ A} \\ I_2 &= 0.5 \text{ A} \\ I_3 &= 3.5 \text{ A} \end{aligned}$$

**Netzwerk 3F**

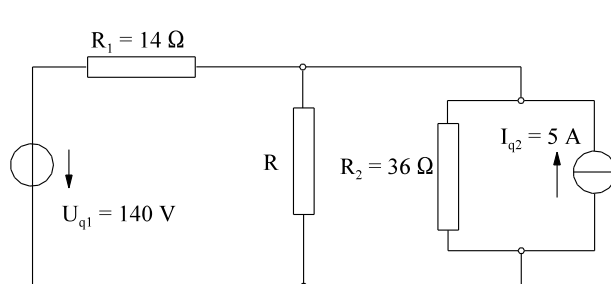
$$\begin{aligned} U_1 &= 10 \text{ V} & I_1 &= 5 \text{ A} \\ U_2 &= 15 \text{ V} & I_2 &= 3 \text{ A} \\ U_3 &= 10 \text{ V} & I_3 &= 1 \text{ A} \\ U_4 &= 45 \text{ V} & I_4 &= 1 \text{ A} \\ U_5 &= 80 \text{ V} & I_5 &= 4 \text{ A} \\ U_6 &= 45 \text{ V} & I_6 &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

**Netzwerk 3G**

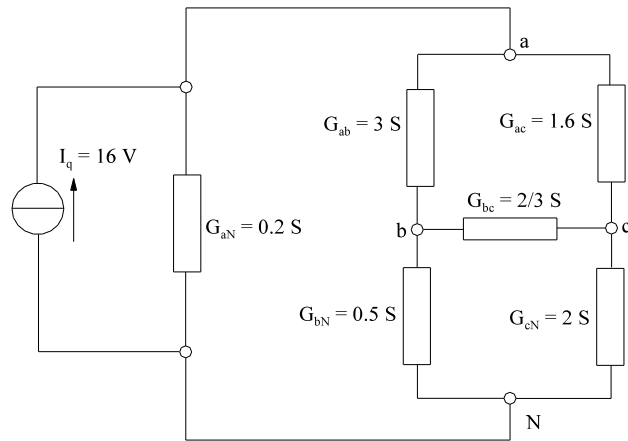
$$\begin{aligned} U_1 &= 30 \text{ V} & I_1 &= 6 \text{ A} \\ U_2 &= 6 \text{ V} & I_2 &= 3 \text{ A} \\ U_3 &= 160 \text{ V} & I_3 &= 4 \text{ A} \\ U_4 &= 100 \text{ V} & I_4 &= 5 \text{ A} \\ U_5 &= 60 \text{ V} & I_5 &= 6 \text{ A} \end{aligned}$$

**Netzwerk 3H**

$$\begin{aligned} U_1 &= -18 \text{ V} & I_1 &= -0.1 \text{ A} \\ U_2 &= 118 \text{ V} & I_2 &= 5.9 \text{ A} \end{aligned}$$

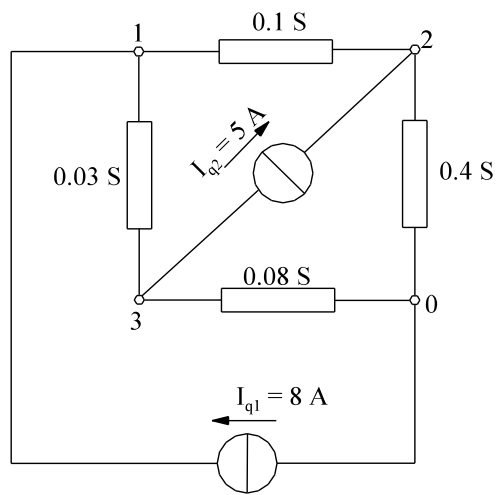
**Netzwerk 3I**

**Netzwerk 3J**



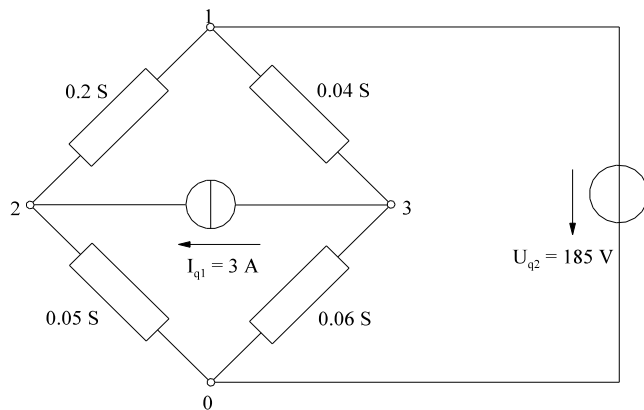
$U_1 = 10 \text{ V}$	$I_1 = 2 \text{ A}$
$U_2 = 2 \text{ V}$	$I_2 = 6 \text{ A}$
$U_3 = 5 \text{ V}$	$I_3 = 8 \text{ A}$
$U_4 = 8 \text{ V}$	$I_4 = 4 \text{ A}$
$U_5 = 5 \text{ V}$	$I_5 = 10 \text{ A}$
$U_6 = -3 \text{ V}$	$I_6 = -2 \text{ A}$

**Netzwerk 3K**



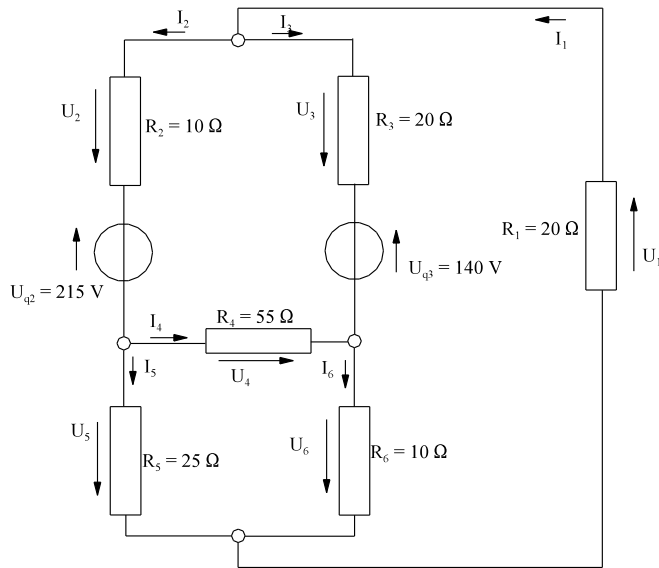
$U_{12} = 50 \text{ V}$	$I_{12} = 5 \text{ A}$
$U_{20} = 25 \text{ V}$	$I_{20} = 10 \text{ A}$
$U_{03} = 25 \text{ V}$	$I_{03} = 2 \text{ A}$
$U_{13} = 100 \text{ V}$	$I_{13} = 3 \text{ A}$

**Netzwerk 3L**



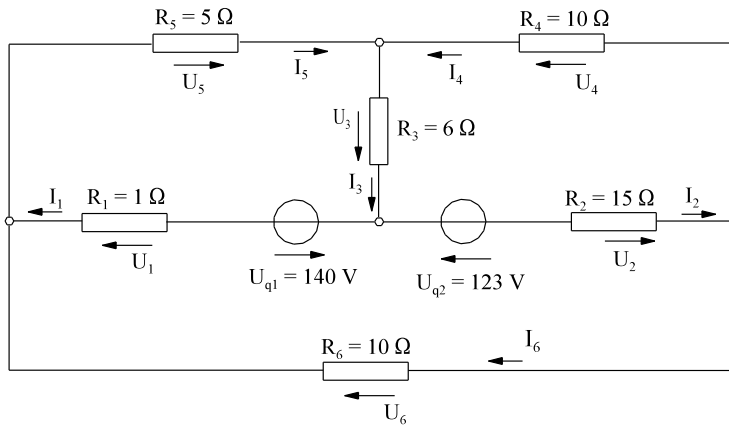
$U_{12} = 25 \text{ V}$	$I_{12} = 5 \text{ A}$
$U_{13} = 141 \text{ V}$	$I_{13} = 5.64 \text{ A}$
$U_{20} = 160 \text{ V}$	$I_{20} = 8 \text{ A}$
$U_{30} = 44 \text{ V}$	$I_{30} = 2.64 \text{ A}$
	$I_{10} = 10.64 \text{ A}$

Netzwerk 3M



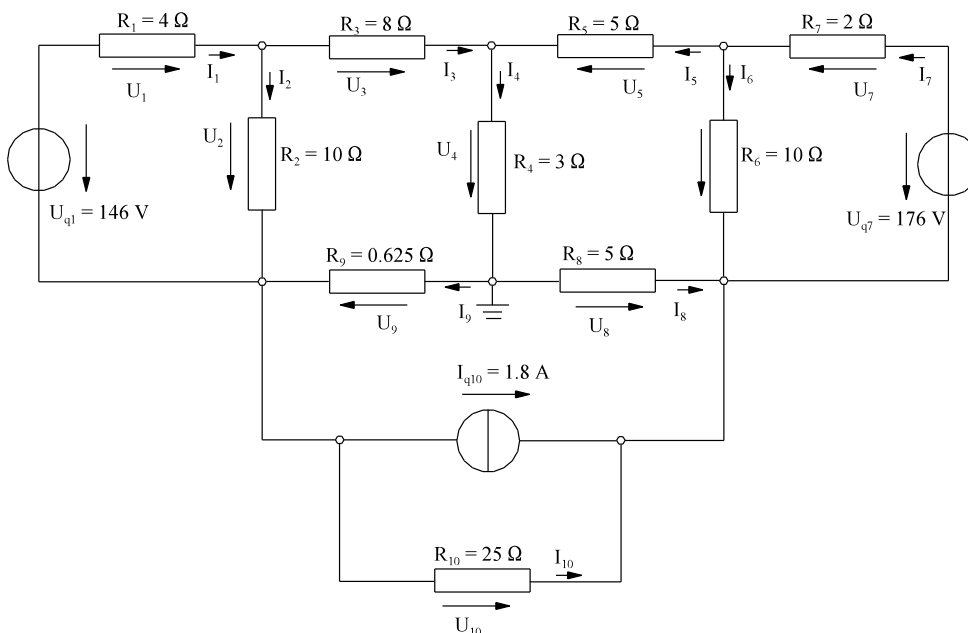
$U_1 = 100 \text{ V}$	$I_1 = 5 \text{ A}$
$U_2 = 40 \text{ V}$	$I_2 = 4 \text{ A}$
$U_3 = 20 \text{ V}$	$I_3 = 1 \text{ A}$
$U_4 = 55 \text{ V}$	$I_4 = 1 \text{ A}$
$U_5 = 75 \text{ V}$	$I_5 = 3 \text{ A}$
$U_6 = 20 \text{ V}$	$I_6 = 2 \text{ A}$

Netzwerk 3N



$U_1 = 12 \text{ V}$	$I_1 = 12 \text{ A}$
$U_2 = 15 \text{ V}$	$I_2 = 1 \text{ A}$
$U_3 = 78 \text{ V}$	$I_3 = 13 \text{ A}$
$U_4 = 30 \text{ V}$	$I_4 = 3 \text{ A}$
$U_5 = 50 \text{ V}$	$I_5 = 10 \text{ A}$
$U_6 = -20 \text{ V}$	$I_6 = -2 \text{ A}$

Netzwerk 3O



$U_1 = 56 \text{ V}$
$U_2 = 90 \text{ V}$
$U_3 = 40 \text{ V}$
$U_4 = 45 \text{ V}$
$U_5 = 50 \text{ V}$
$U_6 = 130 \text{ V}$
$U_7 = 46 \text{ V}$
$U_8 = 35 \text{ V}$
$U_9 = 5 \text{ V}$
$U_{10} = 30 \text{ V}$
$I_1 = 14 \text{ A}$
$I_2 = 9 \text{ A}$
$I_3 = 5 \text{ A}$
$I_4 = 15 \text{ A}$
$I_5 = 10 \text{ A}$
$I_6 = 13 \text{ A}$
$I_7 = 23 \text{ A}$
$I_8 = 7 \text{ A}$
$I_9 = 8 \text{ A}$
$I_{10} = 1.2 \text{ A}$

**3.1.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.1**

Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
<b>AF.3.1.A</b>	Ein Knoten : * ist eine leitende Verbindung zwischen zwei oder mehreren Zweigenden * ist ein geschlossener Umlauf in einem Netzwerk * ist ein teilweiser Umlauf in einem Netzwerk * kann die Verbindung zwischen zwei Knoten mittels Widerstand darstellen.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.1.B</b>	Ein Masche: * ist eine leitende Verbindung zwischen zwei oder mehreren Zweigenden * ist ein geschlossener Umlauf in einem Netzwerk * ist ein teilweiser Umlauf in einem Netzwerk * kann die Verbindung zwischen zwei Knoten mittels Widerstand darstellen.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.1.C</b>	Ein Zweig * ist eine leitende Verbindung zwischen zwei oder mehreren Zweigenden * ist ein geschlossener Umlauf in einem Netzwerk * ist ein teilweiser Umlauf in einem Netzwerk * kann die Verbindung zwischen zwei Knoten mittels Widerstand darstellen.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
	Ein Zweig kann bestehen aus der * nur einem Widerstand * nur einer idealen Spannungsquelle * nur einer idealen Stromquelle * aus der Reihenschaltung eines Widerstandes und einer idealen Spannungsquelle * aus der Reihenschaltung eines Widerstandes und einer idealen Stromquelle * aus der Parallelschaltung eines Widerstandes und einer idealen Spannungsquelle * aus der Parallelschaltung eines Widerstandes und einer idealen Stromquelle	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

<p>Was ist ein Knoten?</p> <p><b>Frage 3.1.A</b></p> <p>_____</p> <p>_____</p>
<p><b>Frage 3.1.B</b> Was ist ein Zweig?</p> <p>_____</p> <p>_____</p>
<p><b>Frage 3.1.B</b> Was ist eine Masche?</p> <p>_____</p> <p>_____</p>
<p><b>Frage 3.1.C</b> Mit welchem Formelbuchstaben werden abgekürzt</p> <p>Anzahl der Zweige _____ Anzahl der Knoten _____</p> <p>Anzahl der Maschen _____</p>

**Frage 3.1.D** Geben Sie für die Netzwerke 3A bis 3H die Anzahl der Knoten und Zweige an.

3A  $k = \underline{\quad}$   $z = \underline{\quad}$

3B  $k = \underline{\quad}$   $z = \underline{\quad}$

3C  $k = \underline{\quad}$   $z = \underline{\quad}$

3D  $k = \underline{\quad}$   $z = \underline{\quad}$

3E  $k = \underline{\quad}$   $z = \underline{\quad}$

3F  $k = \underline{\quad}$   $z = \underline{\quad}$

3G  $k = \underline{\quad}$   $z = \underline{\quad}$

3H  $k = \underline{\quad}$   $z = \underline{\quad}$

## 3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze

### 3.2.1. Methode

Zur Erläuterung der Methode soll das Beispiel-Netzwerk nach Bild EG311A betrachtet werden.

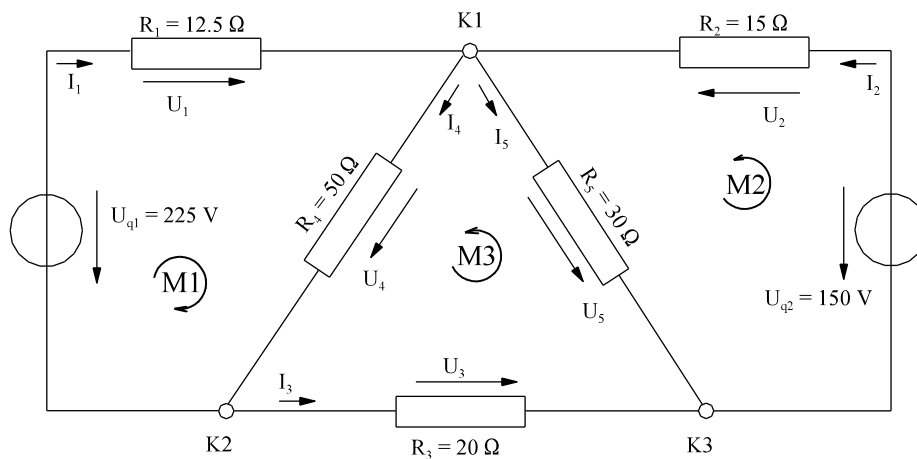


Bild EG311A: Beispiel-Netzwerk

**1. Frage:** Wie viele unbekannte Größen sind zu berechnen?

**Antwort:** 5 unbekannte Ströme und 5 unbekannte Spannungen ergeben insgesamt 10 zu berechnende physikalische Größen.

**2. Frage:** Wie viele Gleichungen sind zur Berechnung dieser 10 Größen notwendig?

**Antwort:** 10 Gleichungen.

**3. Frage:** Woher erhält man die notwendigen 10 Gleichungen?

**Antwort:** Von dem drei bekannten Gesetzen:

- ohmsches Gesetz,
- 1. Kirchhoffsches Gesetz (Stromsumme)
- 2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenumlauf)

#### Auswertung des ohmschen Gesetzes:

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ergibt für das Beispiel-Netzwerk nach Bild EG311A fünf Gleichungen nach dem ohmschen Gesetz:

$$U_1 = I_1 \cdot R_1$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_3$$

$$U_4 = I_4 \cdot R_4$$

$$U_5 = I_5 \cdot R_5$$

**Fazit:** Das ohmsche Gesetz liefert  $z$  Gleichungen



**Auswertung 1. Kirchhoffsches Gesetz:**

Für das Beispiel-Netzwerk nach Bild EG311A ergeben sich drei Knotensummen für die Knoten K1 bis K3.

$$\begin{array}{lcl} \text{K1:} & & I_1 + I_2 - I_4 - I_5 = 0 \\ \text{K2:} & & -I_1 - I_3 + I_4 = 0 \\ \text{K3:} & & -I_2 + I_3 + I_5 = 0 \end{array}$$

Werden die letzten beiden Gleichungen (K2 und K3) addiert und umgeformt ergibt sich

$$\begin{array}{l} -I_1 - I_3 + I_4 - I_2 + I_3 + I_5 = 0 \\ -I_1 - I_2 + I_4 + I_5 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_4 - I_5 = 0 \end{array}$$

Damit erhält man durch Addition von zwei Gleichungen (K2, K3) eine schon bekannte Gleichung (K1).

Mathematisch ausgedrückt: Das Gleichungssystem, aufgestellt für alle Knoten, ist linear abhängig. Aus der Mathematik ist bekannt: Ein Gleichungssystem mit linear abhängigen Gleichungen ist nicht lösbar.

Physikalisch ist die lineare Abhängigkeit folgendermaßen zu erklären: Weil von außen kein Strom in das Netzwerk fließt, ist die Stromsumme im dritten Knoten schon festgelegt.

**Fazit: Ein Netzwerk mit k Knoten hat k-1 unabhängige Knoten-Gleichungen.**

**Auswertung 2. Kirchhoffsches Gesetz:**

Zur Berechnung des Beispiel-Netzwerkes werden 10 Gleichungen benötigt. Das Ohmsche Gesetz ergibt 5 Zusammenhänge. Aus der Knotensumme erhielt man 2 linear unabhängige Gleichungen. Bleiben  $10-5-2 = 3$  Gleichungen mittels 2. Kirchhoffschen Gesetz (Maschenumlauf) zu bestimmen.

Für das Beispiel-Netzwerk nach Bild EG311A können die drei eingezeichneten Maschen M1 bis M3 durch Maschenumlauf ausgewertet werden:

$$\begin{array}{lcl} \text{M1:} & & U_1 + U_4 - U_{q1} = 0 \\ \text{M2:} & & U_2 + U_5 - U_{q2} = 0 \\ \text{M3:} & & U_3 + U_4 - U_5 = 0 \end{array}$$

Die oberen drei Gleichungen sind linear unabhängig. Es gibt allerdings noch die Möglichkeit diverse andere Maschen in das Beispiel-Netzwerk einzuzeichnen. Z.B. ergibt ein Maschenumlauf ganz außen:

$$\text{MA:} \quad U_1 - U_2 + U_{q2} - U_3 - U_{q1} = 0$$

Ist die Gleichung MA nun zusammen mit den Gleichungen M1 bis M3 noch linear unabhängig? Antwort: nein. Beweis: Wird von M1 die Gleichung M2 subtrahiert und die Gleichung M3 addiert, ergibt sich die Gleichung MA.

**Mathematisch ergibt sich die Anzahl der auszuwertenden Maschengleichungen zu:**

$$\begin{array}{ll} m = 10 - 5 - 2 = 3 & \text{(Beispiel-Netzwerk)} \\ m = 2z - z - (k-1) = z - (k-1) & \text{(allgemein)} \end{array}$$

**Achtung: Zur Auswertung der Maschengleichungen muss jeder Zweig mindestens einmal in einer Masche vorhanden sein.**

**Zusammenfassung:**

Bei einem linearen Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten treten z unbekannte Ströme und auch z unbekannte Spannungen auf. Zur Bestimmung der insgesamt 2 z Unbekannten sind auszuwerten:

$$\begin{array}{ll} - & z \quad \text{mal Ohmsches Gesetz} \\ - & (k-1) \quad \text{Knotengleichungen und} \\ - & z-(k-1) \quad \text{Maschengleichungen} \end{array}$$

Werden bei einem linearen Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten die unbekanntes Spannungen über das Ohmsche Gesetz durch die unbekanntes Ströme ersetzt, verringert sich die Anzahl der Unbekanntes um die Hälfte auf nur z Variable. Dann sind auszuwerten:

$$\begin{array}{ll} - & (k-1) \quad \text{Knotengleichungen und} \\ - & z-(k-1) \quad \text{Maschengleichungen} \end{array}$$

### 3.2.2. Berechnung des Beispiel-Netzwerkes

#### A) Gleichungssystem aufstellen

Wie viele Gleichungen sind nun von welcher Art zu wählen? Antwort:

10 Unbekannte	=>	10 Gleichungen notwendig
ohmsches Gesetz	=>	5 Gleichungen
Knotensumme bleiben	=>	3-1 = 2 unabhängige Knoten-Gleichungen
Summe	=>	3 Maschen-Gleichungen
	=>	10 unabhängige Gleichungen

Daraus ergeben sich die 10 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 U_1 - R_1 \cdot I_1 &= 0 \\
 U_2 - R_2 \cdot I_2 &= 0 \\
 U_3 - R_3 \cdot I_3 &= 0 \\
 U_4 - R_4 \cdot I_4 &= 0 \\
 U_5 - R_5 \cdot I_5 &= 0 \\
 -I_1 - I_3 + I_4 &= 0 \\
 -I_2 + I_3 + I_5 &= 0 \\
 U_1 + U_4 &= U_{q1} \\
 U_2 + U_5 &= U_{q2} \\
 U_3 + U_4 - U_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Umgeformt in eine Matrix-Schreibweise:

	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	U <sub>3</sub>	U <sub>4</sub>	U <sub>5</sub>	I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>3</sub>	I <sub>4</sub>	I <sub>5</sub>			
1						-R <sub>1</sub>						U <sub>1</sub>	0
	1						-R <sub>2</sub>					U <sub>2</sub>	0
			1					-R <sub>3</sub>				U <sub>3</sub>	0
				1					-R <sub>4</sub>			U <sub>4</sub>	0
					1					-R <sub>5</sub>		U <sub>5</sub>	0
						-1		-1	1			I <sub>1</sub>	0
							-1	1				I <sub>2</sub>	0
1				1								I <sub>3</sub>	U <sub>q1</sub>
	1				1							I <sub>4</sub>	U <sub>q2</sub>
		1	1	-1								I <sub>5</sub>	0

Das obere Gleichungssystem 10. Ordnung ist zu lösen. Zehn Variablen sind eine Menge. Werden die Spannungen durch Ströme ersetzt, halbiert sich die Anzahl der Variablen:

$$\begin{aligned}
 -I_1 - I_3 + I_4 &= 0 \\
 -I_2 + I_3 + I_5 &= 0 \\
 R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot I_4 &= U_{q1} \\
 R_2 \cdot I_2 + R_5 \cdot I_5 &= U_{q2} \\
 R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 - R_5 \cdot I_5 &= 0
 \end{aligned}$$

oder umgeformt in die Matrix-Schreibweise:

	I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>3</sub>	I <sub>4</sub>	I <sub>5</sub>			
-1	0	-1	1	0			I <sub>1</sub>	0
0	-1	1	0	1			I <sub>2</sub>	0
R <sub>1</sub>	0	0	R <sub>4</sub>	0			I <sub>3</sub>	U <sub>q1</sub>
0	R <sub>2</sub>	0	0	R <sub>5</sub>			I <sub>4</sub>	U <sub>q2</sub>
0	0	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	-R <sub>5</sub>			I <sub>5</sub>	0

**B] Werte einsetzen**

Einsetzen der Werte des Beispiel-Netzwerkes ergibt:

$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$
-1		-1	1	
	-1	1		1
12.5 $\Omega$			50 $\Omega$	
	15 $\Omega$			30 $\Omega$
		20 $\Omega$	50 $\Omega$	-30 $\Omega$

$$* \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 225 \text{ V} \\ 150 \text{ V} \\ 0 \end{matrix}$$

Das obere Gleichungssystem kann in Kurzform mit Matrix und Vektoren geschrieben werden:

$$\bar{M} * \bar{I} = \bar{U}_q$$

Die Matrix  $\bar{M}$  wird dem Variablen-Vektor  $\bar{I}$  multipliziert und man erhält den Vektor der Quellspannungen  $\bar{U}_q$ . Der Vektor  $\bar{I}$  ist zu bestimmen. Die Komponenten der Matrix und der Vektoren haben teilweise physikalische Einheiten. Die Komponenten des Stromvektors haben einheitlich die Maßeinheit "Ampere", während die Komponenten der Quellspannungen einheitlich die Maßeinheit "Volt" aufweisen. Die Komponenten der Matrix  $\bar{M}$  besitzen unterschiedliche Maßeinheiten, entweder "1" oder "Ohm".

**C] Normierung**

Um das obere Gleichungssystem numerisch zu lösen, wird eine Normierung auf SI-Einheiten durchgeführt:

$$\begin{aligned} U_{\text{Norm}} &= 1 \text{ V} \\ I_{\text{Norm}} &= 1 \text{ A} \\ R_{\text{Norm}} &= 1 \Omega \end{aligned}$$

Damit lässt sich oberes Gleichungssystem normiert angeben:

-1	0	-1	1	0
0	-1	1	0	1
12.5	0	0	50	0
0	15	0	0	30
0	0	20	50	-30

$$* \begin{matrix} I_1^N \\ I_2^N \\ I_3^N \\ I_4^N \\ I_5^N \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 225 \\ 150 \\ 0 \end{matrix}$$

**D] Numerische Berechnung**

Das obere Gleichungssystem muss gelöst werden. Mehrere Methoden stehen zur Auswahl

- inverse Matrix
- Cramer Regel
- Gauß'scher Algorithmus
- Eingabe in den Rechner oder Taschenrechner

Im Rahmen dieser Vorlesung sollen alle oberen Methoden aus der Mathematik wiederholt werden. Falls mit Zahlen gerechnet wird, ist es ratsam, möglichst glatte kleine Zahlen zu benutzen. Jede einzelne Zeile des oberen Gleichungssystems kann beliebig multipliziert und dividiert werden. Die Zeilen des oberen Gleichungssystems werden dividiert durch folgende Werte:

- Zeile 1 dividiert durch -1
- Zeile 2 dividiert durch -1
- Zeile 3 dividiert durch 12.5
- Zeile 4 dividiert durch 15
- Zeile 5 dividiert durch 10

1	0	1	-1	0
0	1	-1	0	-1
1	0	0	4	0
0	1	0	0	2
0	0	2	5	-3

$$* \begin{matrix} I_1^N \\ I_2^N \\ I_3^N \\ I_4^N \\ I_5^N \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 18 \\ 10 \\ 0 \end{matrix}$$

Als erstes Verfahren soll der Gauß'sche Algorithmus wiederholt werden.

$I_1^N$	$I_2^N$	$I_3^N$	$I_4^N$	$I_5^N$			
1	0	1	-1	0	0	1	
0	1	-1	0	-1	0	-1	
1	0	0	4	0	18	23	
-1	0	-1	1	0	0	-1	
0	1	0	0	2	10	13	
0	0	2	5	-3	0	4	
		1	-1	0	-1	-1	
		0	-1	5	0	18	22
		1	0	0	2	10	13
		-1	1	0	1	0	1
		0	2	5	-3	0	4
			-1	5	0	18	22
			1	-5	0	-18	-22
			1	0	3	10	14
			-1	5	0	18	22
			2	5	-3	0	4
			-2	10	0	36	44
				5	3	28	36
				1	0.6	5.6	7.2
				15	-3	36	48
				-15	-9	-84	-108
					-12	-48	-60
					1	4	5

$$I_5^N = 4$$

$$I_4^N = 5.6 - 0.6 * I_5^N = 5.6 - 0.6 * 4 = 3.2$$

$$I_3^N = -18 + 5 * I_4^N = -18 + 5 * 3.2 = -2$$

$$I_2^N = I_3^N + I_5^N = -2 + 4 = 2$$

$$I_1^N = -I_3^N + I_4^N = -(-2) + 3.2 = 5.2$$

### E) Entnormierung

$$I = I^N * I_{\text{Norm}}$$

Als Ergebnis erhält man, auch mit Hilfe des ohmschen Gesetzes:

$$I_1 = 5.2 \text{ A}$$

$$U_1 = 65 \text{ V}$$

$$I_2 = 2 \text{ A}$$

$$U_2 = 30 \text{ V}$$

$$I_3 = -2 \text{ A}$$

$$U_3 = -40 \text{ V}$$

$$I_4 = 3.2 \text{ A}$$

$$U_4 = 160 \text{ V}$$

$$I_5 = 4 \text{ A}$$

$$U_5 = 120 \text{ V}$$

Der Strom  $I_3$  hat ein negatives Vorzeichen. Was bedeutet das negative Vorzeichen? Als erstes, wenn noch nicht vorgegeben, wählt man bei einem Netzwerk die Richtungen für jeden Zweig. Diese werden so gewählt, wie man die Stromrichtung erwartet. Ist bei komplizierteren Netzwerken die Richtung nicht auf den ersten Blick zu erkennen, muss eine angenommen werden. Stellt sich nachher ein negatives Vorzeichen ein, ist die angenommene Richtung gerade umgekehrt. Nicht noch mal rechnen! Man muss nur wissen, dass die tatsächliche Richtung entgegengesetzt zur angenommenen Richtung ist.

### F] Probe

Bei allen physikalischen und mathematischen Berechnungen sollten die Berechnungen mit Hilfe einer Probe überprüft werden, wenn möglich. Bei der Lösung linearer Netzwerke (auch bei den später beschriebenen Methoden) gibt zwei Möglichkeiten der Probe:

- Lösung des Gleichungssystems überprüfen
- Bedingungen am Netzwerk überprüfen.

Die meisten Fehler werden bei der Lösung des Gleichungssystems gemacht. Die zugehörige Probe ist zwar ratsam, aber nicht ausreichend. Fehler bei der Aufstellung des Gleichungssystems können hier nicht erkannt werden. Besser ist es, die Probe am Netzwerk durchzuführen. Dazu werden die Ergebnisse in das Netzwerk eingetragen, siehe Bild EG3425A.

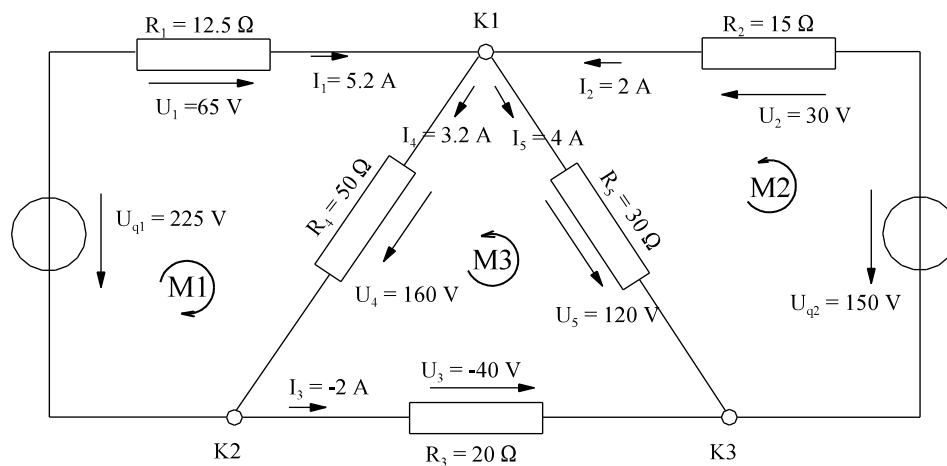


Bild EG325A:

Probe Beispiel-Netzwerk

Nach einer strengen Probe müßten erst die Ströme ins Netzwerk eingetragen werden. Danach müssen die folgenden Gesetze überprüft werden:

- ohmsches Gesetz,
- 1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotensummen) und
- 2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenumläufe)

Nachdem die Ströme eingetragen sind, sollten die Spannungen erneut mit Hilfe der Widerstände berechnet werden. Danach erfolgt die Überprüfung der Stromsumme in den einzelnen Knoten:

$$\begin{array}{ll} \text{K1: } 5.2 \text{ A} + 2 \text{ A} = 3.2 \text{ A} + 4 \text{ A} & \Rightarrow \text{OK} \\ \text{K2: } 3.2 \text{ A} = 5.2 \text{ A} + (-2 \text{ A}) & \Rightarrow \text{OK} \\ \text{K3: } -2 \text{ A} + 4 \text{ A} = 2 \text{ A} & \Rightarrow \text{OK} \end{array}$$

Als letztes müssen Maschenumläufe überprüft werden:

$$\begin{array}{ll} \text{M1: } 225 \text{ V} = 65 \text{ V} + 160 \text{ V} & \Rightarrow \text{OK} \\ \text{M2: } 150 \text{ V} = 30 \text{ V} + 120 \text{ V} & \Rightarrow \text{OK} \\ \text{M3: } -120 \text{ V} + 160 \text{ V} - 40 \text{ V} = 0 & \Rightarrow \text{OK} \end{array}$$

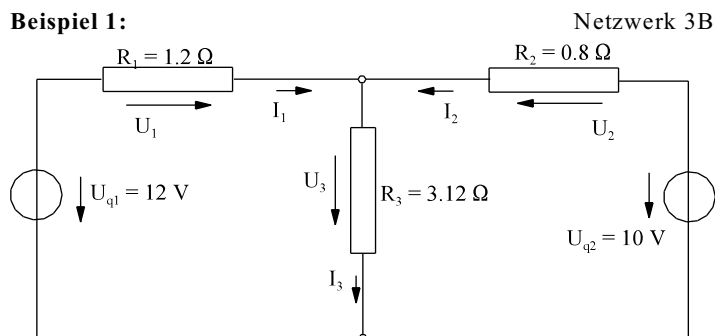
Sind alle Bedingungen erfüllt, gilt die Aufgabe als richtig gelöst. Ist nur eine Bedingung nicht erfüllt, muss der Fehler gesucht werden.

## 3.2.3. Zusammenfassung

<b>Schema: Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze</b>	
<b>gegeben:</b> Netzwerk mit k - Knoten und z - Zweigen <b>gesucht:</b> 2 z Variable (z-Ströme und z-Spannungen)	
A]	Ströme und Spannungen mit Pfeile bezeichnen. Falls möglich, die Richtung so wählen, dass sich positive Werte ergeben.
B]	Spannungen an den Widerständen mit Hilfe des ohmschen Gesetzes durch die Ströme ausdrücken: $U_i = R_i * I_i \quad i = 1 \dots z$
C]	(k-1) - Knoten-Gleichungen notieren.
D]	Den Rest zum Gleichungssystem z. Ordnung durch Maschen-Gleichungen auffüllen. $m = z - (k-1)$ - Maschen-Gleichungen  Dazu m Maschenrichtungen einzeichnen. m Maschenumläufe ergeben m Maschen-Gleichungen. Alle Zweige müssen mindestens einmal durchlaufen werden.
E]	Gleichungssystem als Matrix mal Vektor schreiben: $\overline{M} * \overline{I} = \overline{k}$
F]	Gleichungssystem normieren: $\overline{M}^N * \overline{I}^N = \overline{U}_q^N$
G]	Gleichungssystem mit Zahlenwerten lösen.
H]	Entnormieren $\Rightarrow$ physikalische Größen: Ströme
I]	Ohmsches Gesetz $\Rightarrow$ Spannungen an R
J]	Ströme und Spannungen im Netzwerk eintragen.
K]	Probe: - z mal ohmsches Gesetz, - k mal Knotensumme und - m mal Maschenumlauf

### 3.2.4. Beispiele zu Knoten und Maschenanalyse

Beispiel 1:



$z = 3$        $k = 2$        $\Rightarrow$       1 Kontengleichung  $3 - (2 - 1)$  Maschengleichungen

Gleichungssystem aufstellen:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 = U_{q1}$$

$$R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = U_{q2}$$

(aus  $U_1 + U_3 = U_{q1}$ )

(aus  $U_2 + U_3 = U_{q2}$ )

1	1	-1	$I_1$	=	0
$R_1$		$R_3$	$I_2$		$U_{q1}$
	$R_2$	$R_3$	$I_3$		$U_{q2}$

Werte einsetzen:

1	1	-1	$I_1$	=	0
1.2 $\Omega$		3.12 $\Omega$	$I_2$		12 V
	0.8 $\Omega$	3.12 $\Omega$	$I_3$		10 V

Normieren:

1	1	-1	$I_1^N$	=	0
1.2		3.12	$I_2^N$		12
	0.8	3.12	$I_3^N$		10

Zeile 2 und 3 mit Faktor multiplizieren:

1	1	-1	$I_1^N$	=	0
15	0	39	$I_2^N$		150
0	10	39	$I_3^N$		125

Lösung mittels Gauß'schen Algorithmus:

1	1	-1	0	1
15	0	39	150	204
-15	-15	15	0	-15
0	10	39	125	174
	-15	54	150	189
	1	-3.6	-10	-12.6
	10	39	125	174
	-10	36	100	126
		75	225	300
		1	3	4

$$I_3^N = 3$$

$$I_2^N = 3.6 \cdot I_3^N - 10 = 3.6 \cdot 3 - 10 = 0.8$$

$$I_1^N = -I_2^N + I_3^N = -0.8 + 3 = 2.2$$

Entnormieren und Anwendung des ohmschen Gesetzes

$$I_1 = 2.2 \text{ A}$$

$$I_2 = 0.8 \text{ A}$$

$$I_3 = 3 \text{ A}$$

$$U_1 = 1.2 \Omega \cdot 2.2 \text{ A} = 2.64 \text{ V}$$

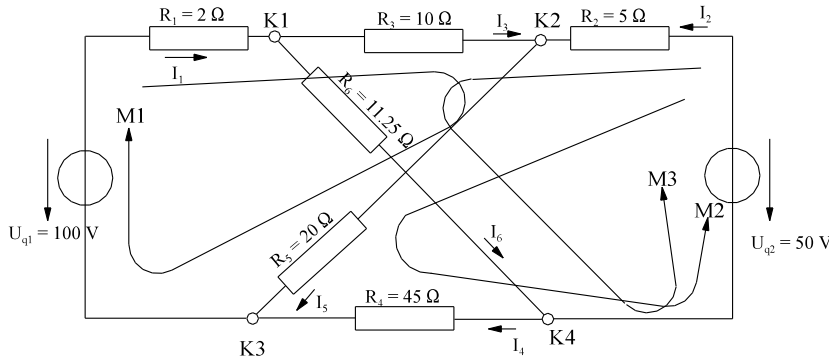
$$U_2 = 0.8 \Omega \cdot 0.8 \text{ A} = 0.64 \text{ V}$$

$$U_3 = 3.12 \Omega \cdot 3 \text{ A} = 9.36 \text{ V}$$

Probe: (nicht vergessen)

**Beispiel 2:**

**Netzwerk 3F**



$k = 4$   
 $z = 6$   
 $m = z - (k - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$

K1:  $I_1 - I_3 - I_6 = 0$   
 K2:  $I_2 + I_3 - I_5 = 0$   
 K3:  $-I_1 + I_4 + I_5 = 0$

M1:  $R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 + R_5 \cdot I_5 = U_{q1}$   
 M2:  $R_2 \cdot I_2 + R_5 \cdot I_5 - R_4 \cdot I_4 = U_{q2}$   
 M3:  $R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 + R_6 \cdot I_6 = U_{q2}$

	1	2	3	4	5	6
K1:	1		-1			-1
K2:		1	1		-1	
K3:	-1			1	1	
M1:	$R_1$		$R_3$		$R_5$	
M2:		$R_2$		$-R_4$	$R_5$	
M3:		$R_2$	$-R_3$			$R_6$

$I_1$	$0$
$I_2$	$0$
$I_3$	$0$
$I_4$	$U_{q1}$
$I_5$	$U_{q2}$
$I_6$	$U_{q2}$

1		-1			-1
	1	1		-1	
-1			1	1	
2		10		20	
	5		-45	20	
	5	-10			1125

$I_1^N$	$0$
$I_2^N$	$0$
$I_3^N$	$0$
$I_4^N$	$100$
$I_5^N$	$50$
$I_6^N$	$50$

$\overline{M}^N * \overline{I}^N = \overline{U}_q^N$ 
 $\overline{I}^N = (\overline{M}^N)^{-1} * \overline{U}_q^N$

Eingabe in den Taschenrechner ergibt durch Invertieren von  $\overline{M}^N$  und anschließender Multiplikation mit  $\overline{U}_q^N$ :

$I_1^N$	$5$
$I_2^N$	$3$
$I_3^N$	$1$
$I_4^N$	$1$
$I_5^N$	$4$
$I_6^N$	$4$

Entnormieren und Anwendung des ohmschen Gesetzes ergibt:

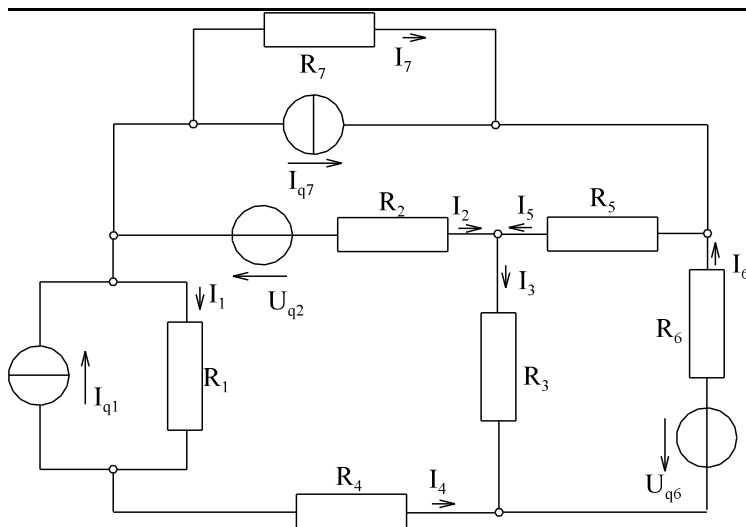
$I_1 = 5 \text{ A}$      $U_1 = 10 \text{ V}$   
 $I_2 = 3 \text{ A}$      $U_2 = 15 \text{ V}$   
 $I_3 = 1 \text{ A}$      $U_3 = 10 \text{ V}$   
 $I_4 = 1 \text{ A}$      $U_4 = 45 \text{ V}$   
 $I_5 = 4 \text{ A}$      $U_5 = 80 \text{ V}$   
 $I_6 = 4 \text{ A}$      $U_6 = 45 \text{ V}$

**3.2.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.2**

Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
<b>AF.3.2.A</b>	Bei der Maschen- und Knotenanalyse (Auswertung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze) müssen * Spannungsquellen in Stromquellen umgerechnet werden * Stromquellen in Spannungsquellen umgerechnet werden * keine Quellen umgerechnet werden	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>



Auswahlfrage	Die folgenden Behauptungen sind :	richtig	falsch
<b>AF.3.2.B</b>	Bei der Maschen- und Knotenanalyse (Auswertung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze) werden: * (k-1) Knotengleichungen ausgewertet * (k) Knotengleichungen ausgewertet * (k+1) Knotengleichungen ausgewertet * $m = z + (k-1)$ Maschengleichungen ausgewertet * $m = z - (k-1)$ Maschengleichungen ausgewertet * $m = z - (k+1)$ Maschengleichungen ausgewertet * insgesamt z Gleichungen ausgewertet * insgesamt $z + k$ Gleichungen ausgewertet * i.A. die Ströme durch Spannungen ersetzt * i.A. die Spannungen durch Ströme ersetzt	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.2.C</b>	Bei der Maschen- und Knotenanalyse (Auswertung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze) müssen bei den Maschenumläufen * alle Zweige mindestens 1 mal durchlaufen werden * alle Zweige mindestens 2 mal durchlaufen werden * nicht alle Zweige einmal durchlaufen werden	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.2.D</b>	Bei der Maschen- und Knotenanalyse (Auswertung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze) sind bei Maschenumläufen zu berücksichtigen: * Stromquellen * Spannungsquellen * Spannungen der Widerstände	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.2.E</b>	Bei der Maschen- und Knotenanalyse (Auswertung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze) sind bei Knotensummen zu berücksichtigen: * Stromquellen * Spannungsquellen * Spannungen der Widerstände * Ströme der Widerstände	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>



**Aufgabe 3.2.A:** Stellen Sie für das linke Netzwerk das Gleichungssystem für die Ströme  $I_1$  bis  $I_7$  mit Hilfe von Maschen- und Knotenanalyse (Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze) auf. Tragen Sie das Ergebnis in das unten vorbereitete Gleichungssystem ein. Hinweis: Achten Sie darauf, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

1	2	3	4	5	6	7		
							$I_1$	
							$I_2$	
							$I_3$	
							$I_4$	
							$I_5$	
							$I_6$	
							$I_7$	

\*

=	

**Aufgabe 3.2.B:**  
Geben Sie für das dargestellte Netzwerk ein Gleichungssystem für alle unbekanntnen Ströme mit Hilfe von Maschen- und Knotenanalyse (Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze) an. **Achtung:** Die Lösung des Gleichungssystems muss eindeutig sein. Geben Sie das Gleichungssystem in Matrizenform an.

**Aufgabe 3.2.C:**  
Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen mit Hilfe der Maschen- und Knotenanalyse (Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze).

**Aufgabe 3.2.D**  
Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen mit Hilfe der Maschen- und Knotenanalyse (Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze).

**Frage 3.2.A** Gegeben ist ein Netzwerk mit  $k$  Knoten und  $z$  Zweigen. Die Ströme der  $z$ -Zweige sind gesucht. Bei der Maschen- und Knotenanalyse (Auswertung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze) werden benötigt:

Anzahl der Gleichungen insgesamt	---
Anzahl der Knotengleichungen	---
Anzahl der Maschengleichungen	---

### 3.3. Maschenstrom-Verfahren

#### 3.3.1. Einführung von Maschenströmen

In jeder Masche wird ein Maschenstrom eingeführt. Dieses soll anhand des Beispiel-Netzwerkes diskutiert werden, siehe Bild EG331A.

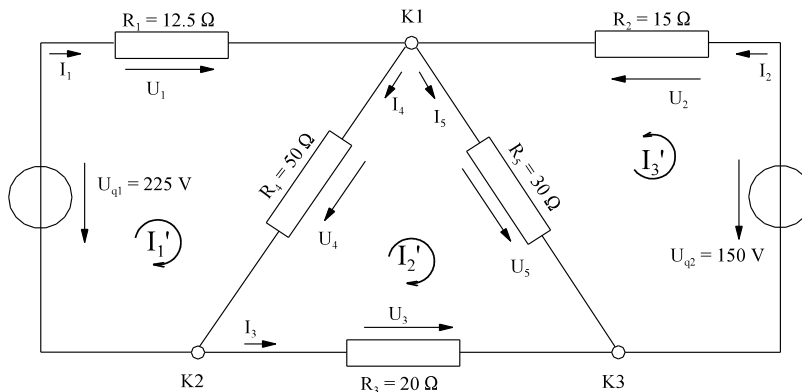


Bild EG331A

Die Maschenströme werden zur Unterscheidung der Zweigströme mit einem Strich gekennzeichnet.

Der Maschenstrom kann als Kreisstrom in der Masche angesehen werden. In manchen Zweigen sind mehrere Maschen- bzw. Kreisströme beteiligt. Die Zweigströme ergeben sich durch die Überlagerung aller Maschenströme unter Beachtung des Vorzeichens. Für das Beispiel-Netzwerk mit  $z = 5$  Zweigen und  $k = 3$  Knoten ergibt sich die Anzahl der Maschen:

$$m = z - (k - 1) = 5 - (3 - 1) = 3$$

Drei Maschen und somit die drei Maschenströme

$$\dot{I}'_1, \dot{I}'_2 \text{ und } \dot{I}'_3$$

sind erforderlich. Die Zweigströme ausdrückt durch die Maschenströme ergeben sich zu:

$$I_1 = \dot{I}'_1$$

$$I_2 = \dot{I}'_3$$

$$I_3 = -\dot{I}'_2$$

$$I_4 = \dot{I}'_1 - \dot{I}'_2$$

$$I_5 = \dot{I}'_2 + \dot{I}'_3$$

Der Maschenumlauf (Maschenrichtung gleiche Richtung der Maschenströme) des Beispiel-Netzwerkes ergibt:

$$M1: \quad I_1 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_4 = U_{q1}$$

$$M2: \quad I_5 \cdot R_5 - I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 = 0$$

$$M3: \quad I_2 \cdot R_2 + I_5 \cdot R_5 = U_{q2}$$

Die Ströme in den oberen drei Gleichungen können durch die Maschenströme ersetzt werden:

$$\dot{I}'_1 \cdot R_1 + (\dot{I}'_1 - \dot{I}'_2) \cdot R_4 = U_{q1}$$

$$(\dot{I}'_2 + \dot{I}'_3) \cdot R_5 - (-\dot{I}'_2) \cdot R_3 - (\dot{I}'_1 - \dot{I}'_2) \cdot R_4 = 0$$

$$\dot{I}'_3 \cdot R_2 + (\dot{I}'_2 + \dot{I}'_3) \cdot R_5 = U_{q2}$$

Ordnen nach Maschenströme ergibt:

$$\begin{aligned} I_1' \cdot (R_1 + R_4) - I_2' \cdot R_4 &= U_{q1} \\ -I_1' \cdot R_4 + I_2' \cdot (R_4 + R_3 + R_5) + I_3' \cdot R_5 &= 0 \\ I_2' \cdot R_5 + I_3' \cdot (R_2 + R_5) &= U_{q2} \end{aligned}$$

Übersichtlicher ist die Umformung in die Matrix-Schreibweise:

	$I_1'$	$I_2'$	$I_3'$			
1'	$R_1 + R_4$	$-R_4$	$0$	=	$I_1'$	$U_{q1}$
2'	$-R_4$	$R_3 + R_4 + R_5$	$R_5$		$I_2'$	$0$
3'	$0$	$R_5$	$R_2 + R_5$		$I_3'$	$U_{q2}$

Es ist sicherlich kein Zufall, was in der oberen Matrix für Elemente vorhanden sind.

#### Hauptdiagonale:

Hier sind die Widerstände, die beim Maschenumlauf auftreten, als Summe aufgeführt.

#### Nebenelemente:

Dort sind die Koppel-Elemente zwischen zwei Maschen vorhanden. An der Stelle 1'-2' taucht der Widerstand  $R_4$  auf, weil er sowohl vom Maschenstrom  $I_1'$  als auch von  $I_2'$  durchflossen wird. Das gleiche gilt für 2'-1' aus Symmetrie-Gründen. Auch der Widerstand  $R_5$  wird von zwei Maschenströmen durchflossen und zwar von  $I_2'$  und  $I_3'$ . Somit taucht der Widerstand  $R_5$  bei 2'-3' und 3'-2' auf. Warum ist das Vorzeichen bei  $R_4$  und  $R_5$  unterschiedlich? Werden die Koppel-Elemente vom Maschenstrom gleichsinnig durchflossen, ist das Vorzeichen plus zu wählen. Sind die Maschen-Richtungen in den Koppel-Elementen unterschiedlich, muss das Vorzeichen Minus gewählt werden. Anmerkung: Die Matrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.

#### Spannungsvektor:

Als Anregung ist der Vektor der Quellspannungen vorhanden. In der Masche zwei sind keine Spannungen vorhanden, daher auch keine Anregung. Hier stehen, unter Beachtung des Vorzeichens für die entsprechende Masche, die Summe der Quellspannungen. Positiv wird die Spannung gezählt, wenn die Quelle einen positiven Maschenstrom beitragen würde.

#### Einsetzen von Zahlenwerten in die obere Matrix-Gleichung

$62.5 \Omega$	$-50 \Omega$	$0$	=	$I_1'$	$225 \text{ V}$
$-50 \Omega$	$100 \Omega$	$30 \Omega$		$I_2'$	$0$
$0$	$30 \Omega$	$45 \Omega$		$I_3'$	$150 \text{ V}$

$62.5$	$-50$	$0$	=	$I_1'^N$	$225$
$-50$	$100$	$30$		$I_2'^N$	$0$
$0$	$30$	$45$		$I_3'^N$	$150$

**Normiertes Gleichungssystem lösen**

Die Zeilen werden durch 12.5, 10 und 5 dividiert:

5	-4	0
-5	10	3
0	6	9

$I_1^N$
$I_2^N$
$I_3^N$

 $=$ 

18
0
30

$I_1^N$	$I_2^N$	$I_3^N$	$\Sigma$	
5	-4	0	18	19
1	-0.8	0	3.6	3.8
-5	10	3	0	8
5	-4	0	18	19
0	6	9	30	45
	6	3	18	27
	1	0.5	3	4.5
	6	9	30	45
	-6	-3	-18	-27
		6	12	18
		1	2	3

$$I_3^N = 2$$

$$I_2^N = -0.5 \cdot I_3^N + 3 = -0.5 \cdot 2 + 3 = 2$$

$$I_1^N = 0.8 \cdot I_2^N + 3.6 = 0.8 \cdot 2 + 3.6 = 5.2$$

**Normierte Zweigströme berechnen:**

$$I_1^N = I_1^N = 5.2$$

$$I_2^N = I_3^N = 2$$

$$I_3^N = -I_3^N = -2$$

$$I_4^N = I_1^N - I_2^N = 5.2 - 2 = 3.2$$

$$I_5^N = I_2^N + I_3^N = 2 + 2 = 4$$

**Entnormieren und ohmsches Gesetz anwenden:**

$$I_1 = 5.2 \text{ A}$$

$$U_1 = 65 \text{ V}$$

$$I_2 = 2 \text{ A}$$

$$U_2 = 30 \text{ V}$$

$$I_3 = -2 \text{ A}$$

$$U_3 = -40 \text{ V}$$

$$I_4 = 3.2 \text{ A}$$

$$U_4 = 160 \text{ V}$$

$$I_5 = 4 \text{ A}$$

$$U_5 = 120 \text{ V}$$

## 3.3.2. Schema zum Maschenstrom-Verfahren

<b>Manuelles Maschenstrom-Verfahren</b>	
<b>gegeben:</b>	Netzwerk mit z-Zweigen und k-Knoten
<b>gesucht:</b>	2 z Variable (z-Ströme und z-Spannungen)
A]	Evtl. vorhandene Stromquellen in Spannungsquellen wandeln.
B]	Zweigrichtungen festlegen.
C]	$m = z - (k - 1)$ Maschenströme $\vec{I}'_j$ mit Richtung und Masche festlegen ( $j = 1 \dots n$ ). Dabei muss jeder Zweig mindestens von einem Maschenstrom durchflossen werden.
D]	Gleichungssystem $(z - k + 1)$ -ter. Ordnung mit den Maschenströmen als Variable aufstellen $\bar{R}' * \bar{I}' = \bar{U}'_q$
E]	<b>Hauptdiagonale:</b> Summe der Maschen-Widerstände eintragen.
F]	<b>Nebenelemente:</b> a) Symmetrisch zur Haupt-Diagonalen eintragen. b) Bei ij und ji steht der Widerstand, der in der Masche i und der Masche j gemeinsam vorkommt. + wenn beide Maschenrichtungen gleichsinnig sind - wenn beide Maschenrichtungen gegensinnig sind
G]	<b>Spannungsvektor:</b> Dort werden die Summen der Quellspannungen einer Masche aufsummiert. + wenn $U_{qi}$ positiven Maschestrom treibt - wenn $U_{qi}$ und Maschenrichtung gleich sind
H]	Gleichungssystem normieren. $\bar{R}^{N'} * \bar{I}^{N'} = \bar{U}^{N'}_q$
I]	Gleichungssystem mit nur Zahlenwerten lösen.
J]	Entnormieren => physikalische Größen der Maschenströme
K]	Zweigströme mit Hilfe der Maschestrome berechnen.
L]	Evtl. gewandelte Quellen zurückwandeln.
M]	ohmsches Gesetz => Zweig-Spannungen
N]	Ströme und Spannungen im Netzwerk eintragen.
O]	Probe - ohmsches Gesetz - Stromsumme - Maschenumläufe

### 3.3.3. Beispiele zum Maschenstromverfahren

**Beispiel 1:** (Netzwerk 3B)

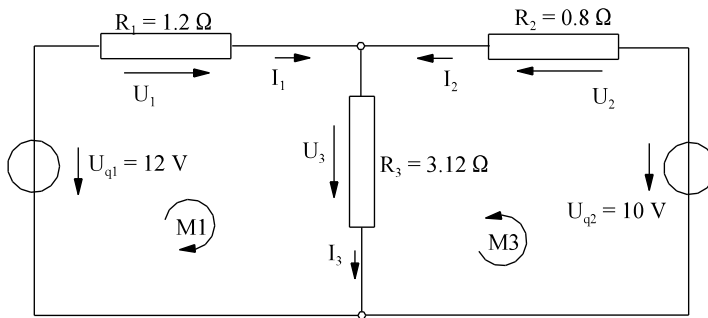


Bild EG333A

$$z = 3 \quad k = 2 \quad m = z - (k - 1) = 3 - (2 - 1) = 2$$

$R_1 + R_3$	$R_3$
$R_3$	$R_2 + R_3$

$I_1'$	=	$U_{q1}$
$I_2'$		$U_{q2}$

$4.32 \Omega$	$3.12 \Omega$
$3.12 \Omega$	$3.92 \Omega$

$I_1'$	=	$12 \text{ V}$
$I_2'$		$10 \text{ V}$

**Cramer Regel:**

$$I_1' = \frac{\begin{vmatrix} 12 \text{ V} & 3.12 \Omega \\ 10 \text{ V} & 3.92 \Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4.32 \Omega & 3.12 \Omega \\ 3.12 \Omega & 3.92 \Omega \end{vmatrix}} = \frac{12 \text{ V} * 3.92 \Omega - 10 \text{ V} * 3.12 \Omega}{(4.32 * 3.92 \Omega - 3.12^2) \Omega^2} = \frac{15.84 \text{ V}\Omega}{7.2 \Omega^2} = 2.2 \text{ A}$$

$$I_2' = 3 \text{ A} \quad (\text{ohne Herleitung})$$

$$I_1 = I_1' = 2.2 \text{ A}$$

$$U_1 = R_1 * I_1 = 1.2 \Omega * 2.2 \text{ A} = 2.64 \text{ V}$$

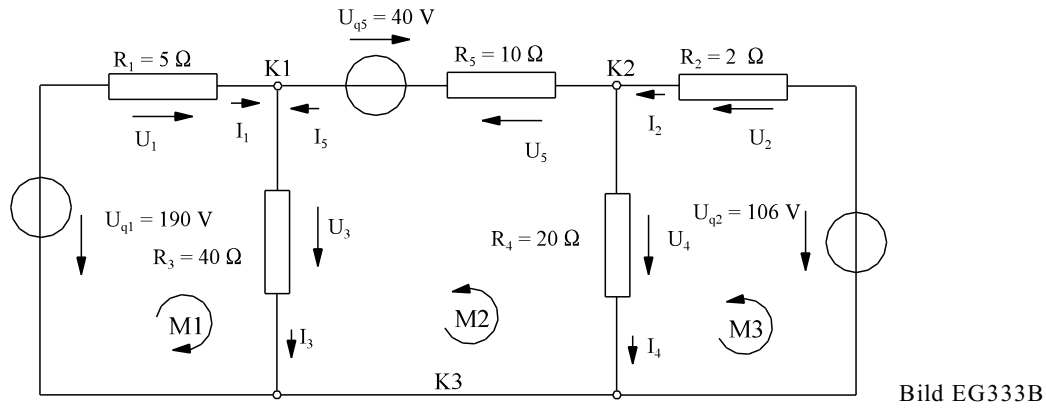
$$U_3 = U_{q1} - U_1 = 12 \text{ V} - 2.64 \text{ V} = 9.36 \text{ V}$$

$$U_2 = U_{q2} - U_3 = 10 \text{ V} - 9.36 \text{ V} = 0.64 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{9.36 \text{ V}}{3.12 \Omega} = 3 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{0.64 \text{ V}}{0.8 \Omega} = 0.8 \text{ A}$$

**Probe:**  $I_1 + I_2 = I_3 \quad 2.2 + 0.8 \text{ A} = 3 \text{ A} \Rightarrow \text{OK}$

**Beispiel 2:** (Netzwerk 3G)

Die Stromquelle im Zweig 5 muss beim Maschenstromverfahren in einer äquivalente Spannungsquelle umgewandelt werden.

$$z = 5 \quad k = 3 \quad m = z - (k - 1) = 5 - (3 - 1) = 3$$

	1'	2'	3'		
1'	$R_1 + R_3$	$R_3$	0	$I_1'$	$U_{q1}$
2'	$R_3$	$R_3 + R_5 + R_4$	$-R_4$	$I_2'$	$R_5 \cdot I_{q5}$
3'	0	$-R_4$	$R_2 + R_4$	$I_3'$	$U_{q2}$
	45	40	0	$I_1^{N'}$	190
	40	70	-20	$I_2^{N'}$	40
	0	-20	22	$I_3^{N'}$	106

Die Lösung des oberen Gleichungssystems ergibt:

$$I_1^{N'} = 6$$

$$I_2^{N'} = -2$$

$$I_3^{N'} = 3$$

Die Berechnung der Zweigströme ergibt:

$$I_1^N = I_1^{N'} = 6$$

$$I_2^N = I_3^{N'} = 3$$

$$I_3^N = I_1^{N'} + I_2^{N'} = 6 - 2 = 4$$

$$I_4^N = I_3^{N'} - I_2^{N'} = 3 - (-2) = 5$$

$$I_5^N = -I_2^{N'} = -(-2) = 2$$

Ohmsches Gesetz und Entnormierung ergibt:

$$I_1 = 6 \text{ A} \quad U_1 = 30 \text{ V}$$

$$I_2 = 3 \text{ A} \quad U_2 = 6 \text{ V}$$

$$I_3 = 4 \text{ A} \quad U_3 = 160 \text{ V}$$

$$I_4 = 5 \text{ A} \quad U_4 = 100 \text{ V}$$

$$I_5 = 2 \text{ A} \quad U_5 = 20 \text{ V}$$



Der Zweig 5 muss wieder zurück gewandelt werden:

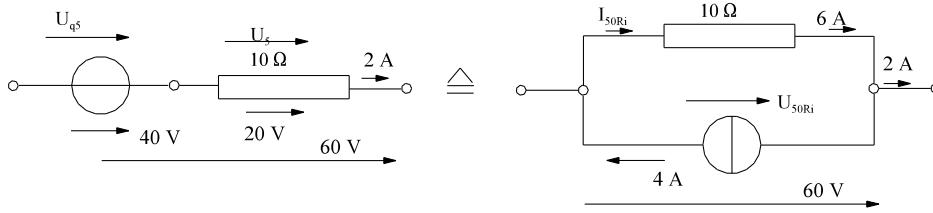


Bild EG333C

$$U_{50Ri} = U_{q5} + U_5 = 40 \text{ V} + 20 \text{ V} = 60 \text{ V}$$

$$I_{50Ri} = U_{50Ri} / R_5 = 60 \text{ V} / 10 \text{ } \Omega = 6 \text{ A}$$

### 3.3.4. Maschenstrom-Verfahren für Rechner

#### 3.3.4.1. Allgemeine Herleitung

Die Möglichkeit des Auftretens eines Fehlers ist bei der Aufstellung des manuellen Maschenstrom-Verfahrens schon wesentlich geringer als bei der Maschen- und Knotenanalyse. Eine weitere Vereinfachung ist, die Struktur des Netzwerkes und den Inhalt der Zweige in getrennten Matrizen einzugeben. Ein Rechner kann dann die Matrizen-Berechnung vornehmen und die Eingabe und das Ergebnis ausgeben.

In einem Netzwerk mit z-Zweigen und k-Knoten müssen erfüllt sein:

- z Gleichungen des ohmschen Gesetzes
- k - 1 Knoten-Gleichungen
- z - (k - 1) Maschen-Gleichungen

Es soll nun versucht werden obere 2z Gleichungen in eine Matrix-Schreibweise zu überführen.

#### Definition der Zweigrichtung

Damit das Maschenstromverfahren für Rechner funktioniert, wird definiert: Die Zweigrichtung ist die Richtung der Spannung am Widerstand, die die gleiche Richtung aufweist als der Zweigstrom. Eine evtl. vorhandene Quellspannung muss entgegengesetzt zur Zweigrichtung gewählt werden. Merke: Quellspannung muss positiven Anteil am Zweigstrom beitragen.

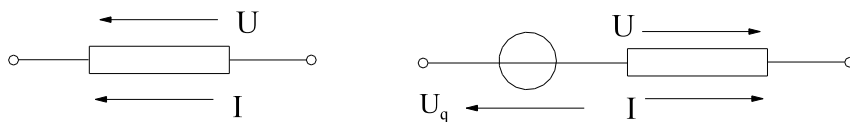


Bild EG334A

#### Auswertung ohmsches Gesetz

Der Zusammenhang zwischen Strömen und Spannungen in den z-Zweigen ist über das ohmsches Gesetz angegeben:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 * I_1 \\ U_2 &= R_2 * I_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ U_z &= R_z * I_z \end{aligned}$$

oder als Matrix mal Vektor:

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{I} \tag{1}$$

$\bar{U}$  - Vektor der Zweigspannung an den Widerständen

$\bar{R}$  - Widerstandsmatrix

$\bar{I}$  - Vektor der Zweigströme

mit den Komponenten

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ \dots \\ U_z \end{pmatrix} \quad \vec{R} = \begin{matrix} \begin{matrix} R_1 & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & R_z \end{matrix} \end{matrix} \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ \dots \\ I_z \end{pmatrix}$$

Die Dimension sind:

$$\text{Dim}(\vec{U}) = (z, 1) \quad \text{Dim}(\vec{R}) = (z, z) \quad \text{Dim}(\vec{I}) = (z, 1)$$

**Auswertung 1. Kirchhoffsches Gesetz**

Die Knotensumme beschreibt das 1. Kirchhoffsche Gesetz. Die Umrechnung von Maschenströme auf Zweigströme soll in Matrix-Form untersucht werden. Die einzelnen Zweigströme ergeben sich aus der Summe der Maschenströme gewichtet mit "+1", "0" oder "-1". Dieses lässt sich in Matrix-Form schreiben.

		1	2	.....	m				
I <sub>1</sub>	1	...	...	...	...	I' <sub>1</sub>			
I <sub>2</sub>	2	...	...	...	...	I' <sub>2</sub>			
...	...	...	...	...	...	...			
...	...	...	...	...	...	...			
I <sub>z</sub>	z	...	...	...	...	I' <sub>m</sub>			

und als Abkürzung

$$\vec{I} = \vec{C} * \vec{I}' \tag{2}$$

$\vec{I}'$  - Vektor der Maschenströme

$$\vec{I}' = \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ \dots \\ \dots \\ I'_z \end{pmatrix}$$

Die Dimensionen sind:  $\text{Dim}(\vec{I}) = (z, 1) \quad \text{Dim}(\vec{C}) = (z, m) \quad \text{Dim}(\vec{I}') = (m, 1)$

Was steht nun der C Matrix, und wie wird diese aufgestellt? Der Inhalt ist, wie schon erwähnt "0", "-1" und "1". Die Dimension sagt aus: Anzahl der Zweige und Anzahl der Maschen. An den Verknüpfungspunkten Zweig Masche ist die Information enthalten, ob der Zweig zur Masche gehört oder nicht. Gehört der Zweig nicht zur Masche, wird eine "0" eingetragen. Das bedeutet, dass der entsprechende Maschenstrom nicht zum Zweigstrom beiträgt. Sind Maschen- und Zweigrichtung (Definition siehe unten) gleich, wird eine "1" eingetragen; bei entgegengesetzter Richtung wird eine "-1" eingetragen.

Einfacher ist es aber, aus dem Netzwerk heraus die Zweigströme als Summe der Maschenströme anzugeben und in die Matrixform

$$\vec{I} = \vec{C} * \vec{I}'$$

umzuschreiben. Dabei kann  $\vec{C}$  abgelesen werden.

### Auswertung 2. Kirchhoffsches Gesetz

Die Maschenregel kann auch in folgender Form angegeben werden: In jeder Masche ist die Summe der Quellspannungen (unter Beachtung des Vorzeichens) gleich der Summe der Spannungsabfälle an den Widerständen (auch unter Beachtung des Vorzeichens). Dieses kann vektoriell in der folgenden Form erfolgen:

$$\begin{array}{|c|} \hline U'_1 \\ \hline U'_2 \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline U'_z \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline U'_{q1} \\ \hline U'_{q2} \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline U'_q \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{U}' = \bar{U}'_q$$

Die Vektoren bedeuten:

$\bar{U}'$  - Summe der Spannungen an den Widerständen einer Masche

$\bar{U}'_q$  - Summe der Quellspannungen pro Masche, schon aus dem normalen Maschenstromverfahren bekannt.

Die Summe der Spannungen in einer Masche ist wieder vom Netzwerk abhängig und kann somit wieder als Matrix mal Vektor geschrieben werden, wobei in der Matrix wieder "0", "1" und "-1" als Elemente vorhanden sind.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & \dots & z \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline U_1 \\ \hline U_2 \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline U_z \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & \dots & z \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline U_{q1} \\ \hline U_{q2} \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline U_{qz} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Die Matrix hat die Dimension (m, z) und ist wieder vom Netzwerk abhängig. Am Kreuzungspunkt Masche-Zweig steht wieder der Zusammenhang Masche-Zweig. Wenn der Zweig nicht in der Masche vorkommt, sieht man eine "0". Maschenrichtung gleich Zweigrichtung ergibt eine "1". Bei Maschenrichtung entgegengesetzt der Zweigrichtung muss eine "-1" eingetragen werden. Die obere Matrix sieht ähnlich aus wie die  $\bar{C}$ -Matrix, die die Verknüpfung von Maschen- und Zweigströmen angibt. Beide Matrizen sind fast identisch und enthalten per Definition die gleichen Inhalte.

$$\text{Dim}(C) = (z, m)$$

Die Dimension der oberen Matrix ist:

$$(m, z)$$

Die obere Matrix ist die transponierte der  $\bar{C}$ -Matrix:  $\bar{C}^T$ . Somit lassen sich alle Maschen-Gleichungen in der Matrix-Schreibweise angeben:

$$\bar{C}^T * \bar{U} = \bar{C}^T * \bar{U}_q \tag{3}$$

$\bar{U}'_q$  - Vektor der Quellspannung in den Zweigen

**Zusammenfassung der bisherigen Formeln:**

Strichgröße ist Maschengröße, ohne Strich entspricht Zweiggröße.

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{I} \quad (1)$$

$$\bar{I} = \bar{C} * \bar{I}' \quad (2)$$

$$\bar{C}^T * \bar{U} = \bar{C}^T * \bar{U}_q \quad (3)$$

(2) in (1) eingesetzt ergibt:

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{C} * \bar{I}' \quad (4)$$

(4) in (3) eingesetzt:

$$\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C} * \bar{I}' = \bar{C}^T * \bar{U}_q \quad (5)$$

Obere Gleichung ist die Gleichung des manuellen Maschenstrom-Verfahrens. Mit

$$\bar{R}' = \bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C} \quad (6)$$

$$\bar{U}'_q = \bar{C}^T * \bar{U}_q \quad (7)$$

ergibt die schon bekannte Matrix-Gleichung des manuellen Maschenstromverfahren

$$\bar{R}' * \bar{I}' = \bar{U}'_q \quad (8)$$

Matrixinversion:

$$\bar{I}' = \bar{R}'^{-1} * \bar{U}'_q \quad (9)$$

Umrechnung auf Zweigströme, einsetzen (9) in (2) ergibt:

$$\bar{I} = \bar{C} * \bar{I}' = \bar{C} * \bar{R}'^{-1} * \bar{U}'_q \quad (10)$$

Ersetzen der Maschengrößen durch Zweiggrößen, einsetzen von (6) und (7) in (10) ergibt:

$$\bar{I} = \bar{C} * \left[ \bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C} \right]^{-1} * \bar{C}^T * \bar{U}_q \quad (11)$$

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{I}$$

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{C} * \left[ \bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C} \right]^{-1} * \bar{C}^T * \bar{U}_q \quad (12)$$

Obere Gleichungen beinhalten Matrix-Operationen. Bei entsprechenden Unterprogrammen müssen nur die Matrizen  $\bar{R}$ ,  $\bar{C}$  und  $\bar{U}_q$  eingegeben werden. Auch der HP 48 kann bei Eingabe von  $\bar{R}$ ,  $\bar{C}$  und  $\bar{U}_q$  die Berechnung ausführen.

3.3.4.2. Herleitung am Beispiel

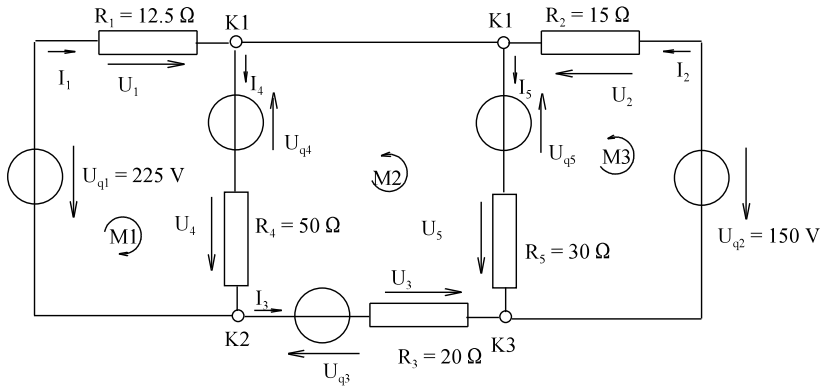


Bild EG3341:

Das Maschenstromverfahren für Rechner soll anhand des Beispielnetzes nach Bild EG3341 hergeleitet werden. Eingabewerte sind die Widerstands-Matrix  $\bar{R}$  und der Quellspannungsvektor  $\bar{U}_q$ . Die Vektoren der Spannung und des Stromes sind zu berechnen. Die Topologie des Netzwerkes soll über die zwei Kirchhoffschen Gesetze und das Ohmsche Gesetz erfasst werden.

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & R_3 & & \\ & & & R_4 & \\ & & & & R_5 \end{bmatrix} \quad \bar{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} \quad \bar{U}_q = \begin{bmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \\ U_{q3} \\ U_{q4} \\ U_{q5} \end{bmatrix}$$

Die Dimension sind:

$$\text{Dim}(\bar{U}) = (z = 5, 1) \quad \text{Dim}(\bar{R}) = (z = 5, z = 5) \quad \text{Dim}(\bar{I}) = (z = 5, 1) \quad \text{Dim}(\bar{U}_q) = (z = 5, 1)$$

**Auswertung 1. Kirchhoffsches Gesetz**

Die Knotensumme beschreibt das 1. Kirchhoffsche Gesetz. Die Umrechnung von Maschenströme auf Zweigströme soll in Matrix-Form untersucht werden. Dazu werden die Zweigströme (wie beim manuellen Maschenstromverfahren) als Funktion der Maschenströme angegeben

$$\begin{aligned} I_1 &= I'_1 \\ I_2 &= I'_3 \\ I_3 &= I'_2 \\ I_4 &= I'_1 + I'_2 \\ I_5 &= -I'_2 + I'_3 \end{aligned}$$

und in Matrixform überführt:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & 1 & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ I'_3 \end{bmatrix}$$

Die einzelnen Zweigströme ergeben sich aus der Summe der Maschenströme gewichtet mit "+1", "0" oder "-1". Dieses lässt sich in Matrix-Form schreiben

$$\bar{I} = \bar{C} * \bar{I}' \tag{2}$$

mit

$$\vec{I}' = \begin{matrix} I'_1 \\ I'_2 \\ I'_3 \end{matrix} \quad - \quad \text{Vektor der Maschenströme}$$

und

$$\vec{C} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & 1 & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{- Maschen} \\ \\ \\ \text{Zweige} \end{matrix} \quad \text{Zweig-Knoten-Inzidenz-Matrix}$$

Die Dimensionen sind:

$$\text{Dim}(\vec{I}) = (m = 3, 1) \qquad \text{Dim}(\vec{C}) = (z = 5, m = 3) \qquad \text{Dim}(\vec{I}') = (m = 3, 1)$$

**Auswertung 2. Kirchhoffsches Gesetz**

Die Maschenregel kann auch in folgender Form angegeben werden: In jeder Masche ist die Summe der Quellspannungen (unter Beachtung des Vorzeichens) gleich der Summe der Spannungsabfälle an den Widerständen (auch unter Beachtung des Vorzeichens):

$$\begin{aligned} U_1 + U_4 &= U_{q1} + U_{q4} \\ U_3 + U_4 - U_5 &= U_{q3} + U_{q4} - U_{q5} \\ U_2 + U_5 &= U_{q2} + U_{q5} \end{aligned}$$

Obere drei Gleichungen können vektoriell in der folgenden Form angegeben werden:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & 1 & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & 1 & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} U_{q1} \\ U_{q2} \\ U_{q3} \\ U_{q4} \\ U_{q5} \end{matrix}$$

Oder mit der schon bekannten (aber Transponierten) Zweig-Knoten-Inzidenz-Matrix

$$\vec{C}^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & 1 & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & 1 & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad T$$

in der Form:  $\vec{C}^T * \vec{U} = \vec{C}^T * \vec{U}_q \qquad (3)$

**Auswertung Ohmsches Gesetz:**

Die Ohmschen Gesetze für die fünf Widerstände lauten:

$$U_1 = R_1 * I_1, \quad U_2 = R_2 * I_2, \quad U_3 = R_3 * I_3, \quad U_4 = R_4 * I_4 \quad \text{und} \quad U_5 = R_4 * I_4$$

oder in Matrixform angegeben:

$$\begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{matrix} = \begin{matrix} R_1 & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & R_3 & & \\ & & & R_4 & \\ & & & & R_5 \end{matrix} * \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{matrix}$$

oder als:

$$\bar{U} = \bar{R} * \bar{I} \tag{1}$$

Mit den Gleichungen (1) bis (3) lassen sich nach Abschnitt 3.3.4.1 die Gleichungen (11) und (12) berechnen.

<b>Schema des Rechner-Maschenstrom-Verfahrens</b>	
<b>gegeben:</b> Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen	
A]	Evtl. vorhandene Stromquellen in Spannungsquellen wandeln.
B]	Zweigrichtung so festlegen, dass Quelle einen positiven Anteil zum Zweigstrom liefert. D.h. wenn Spannungsquelle vorhanden, ist Zweigrichtung entgegengesetzt zur Quellrichtung.
C]	m = z-(k-1) Maschen eindeutig festlegen
D]	<p>Matrix <math>\bar{C}</math> aufstellen <math>\text{Dim}(\bar{C}) = (z, m)</math></p> <p>Kreuzungspunkt Zweig- Masche                      0 =&gt; keine Beeinflussung                      1 =&gt; Maschenrichtung gleich Zweigrichtung                      -1 =&gt; Maschenrichtung und Zweigrichtung unterschiedlich</p> <p>Spalte =&gt; Maschenumlauf                      Zeile =&gt; Umrechnung Maschenströme auf Zweigströme</p> <p>oder</p> <p>-----</p> <p>Zweigströme als Funktion der Maschenströme angeben. Lässt sich <math>\bar{C}</math> ablesen aus:</p> $\bar{I} = \bar{C} * \bar{I}'$
E]	R-Matrix aufstellen. Nur Diagonal-Matrix $\text{Dim}(\bar{R}) = (z, z)$ . In der Diagonalen sind die Zweig-Widerstände positiv einzutragen.
F]	Vektor $\bar{U}_q$ aufstellen. $\text{Dim}(U_q)=(z, 1)$ . Die Quellspannungen der Zweige positiv eintragen.
G]	Normieren
H]	Zweigströme berechnen mit Hilfe eines Rechners
	$\bar{I} = \bar{C} * [\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C}]^{-1} * \bar{C}^T * \bar{U}_q \tag{11}$
I]	Zweigspannungen berechnen
	$\bar{U} = \bar{R} * \bar{I} \quad \bar{U} = \bar{R} * \bar{C} * [\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C}]^{-1} * \bar{C}^T * \bar{U}_q \tag{12}$
J]	Entnormieren
K]	Zweige mit gewandelten Stromquellen zurückrechnen.

**Beispiel 1:**

Das Netzwerk 3N ist für das "Maschenstrom Verfahren für Rechner" aufzubereiten. Die Berechnungsvorschrift für die Zweigströme und die darin enthaltenen Matrizen und Vektoren sind anzugeben.

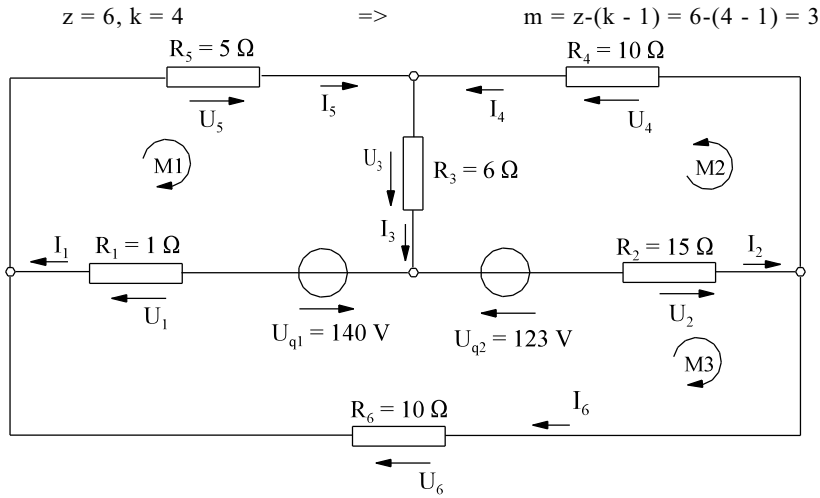


Bild EG334A

$\text{Dim}(\bar{C}) = (z, m) = (6, 3)$

	1'	2'	3'
1	1		-1
2		1	1
3	1	1	
4		1	
5	1		
6			1

$\bar{C} =$

$I_1 = I_1' - I_3'$   
 $I_2 = I_2' + I_3'$   
 $I_3 = I_2' + I_2'$   
 $I_4 = I_2'$   
 $I_5 = I_1'$   
 $I_6 = I_3'$

$\bar{R} =$	$R_1$				
		$R_2$			
			$R_3$		
				$R_4$	
					$R_5$
					$R_6$

$\bar{U}_q =$	$U_{q1}$
	$U_{q2}$

$\bar{I} = \bar{C} [\bar{C}^T * \bar{R} * \bar{C}]^{-1} * \bar{C}^T * \bar{U}_q$



**Beispiel 2:**

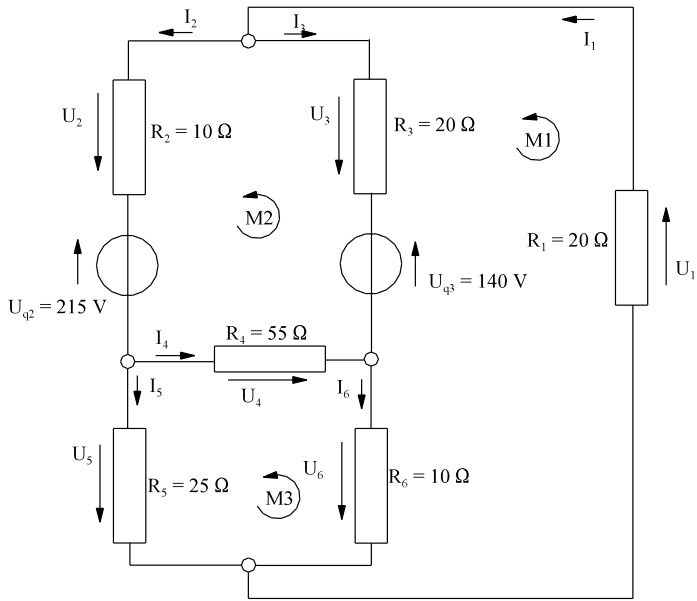


Bild EG334A: Netzwerk 3M

$z = 6, k = 4$

$\Rightarrow$

$m = z - (k - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$

$\bar{C} =$

	1'	2'	3'
1	1		
2		1	
3	1	-1	
4		1	-1
5			1
6	1		-1

$I_1 = I'_1$   
 $I_2 = I'_2$   
 $I_3 = I'_1 - I'_2$   
 $I_4 = I'_2 - I'_3$   
 $I_5 = I'_3$   
 $I_6 = I'_1 - I'_3$

$\bar{R} =$

$R_1$					
	$R_2$				
		$R_3$			
			$R_4$		
				$R_5$	
					$R_6$

$\bar{U}_q =$

$U_{q2}$
$U_{q3}$

### 3.3.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.3

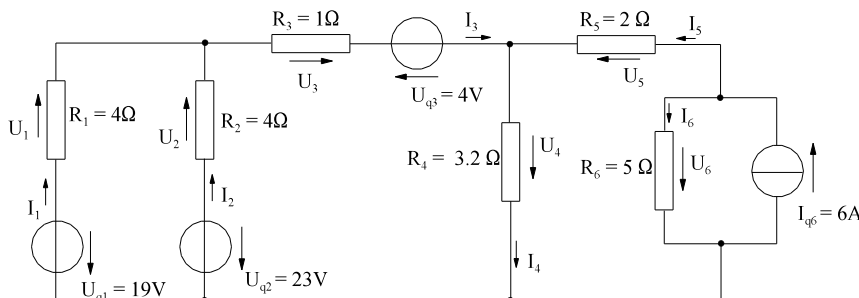
Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.3.3.A</b>	Das Maschenstrom-Verfahren basiert auf: * der Einführung von Knotenpunktpotenzialen * der Einführung von Maschenströmen * der Einführung von Kreisspannungen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.3.3.B</b>	Das Maschenstrom-Verfahren dient: * zur Berechnung von linearen Netzen * zur Berechnung von nichtlinearen Netzen * zur Berechnung von Netzen mit <b>nur</b> einer Spannungsquelle	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.3.3.C</b>	Beim Maschenstrom-Verfahren müssen * Spannungsquellen in Stromquellen umgerechnet werden * Stromquellen in Spannungsquellen umgerechnet werden * keine Quellen umgerechnet werden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.3.3.D</b>	Die Anzahl der notwendigen Maschen beim Massenstrom-Verfahren beträgt: * $m = z$ * $m = z - (k - 1)$ * $m = z - (k + 1)$ * $m = 2z - k + 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.3.3.E</b>	Die Zweigströme ergeben sich durch Überlagerung der Maschenströme. Die Maschenströme ergeben sich durch Überlagerung der Zweigströme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.3.3.F</b>	Beim Maschenstrom-Verfahren sind in der Hauptdiagonalen einzutragen: * die Summe der Widerstände einer Masche * die Summe der Leitwerte einer Masche * die Summe der Leitwerte eines Knotens * die Summe der Widerstände eines Knotens * die Leitwerte zweier Maschen * die Widerstände zweier Maschen * die Spannungsquellen im entsprechenden Knoten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.3.3.G</b>	Beim Maschenstrom-Verfahren sind in den Nebenelementen einzutragen: * an der Stelle 2-3 der Widerstand von Knoten 2 und Knoten 3 * an der Stelle 2-3 der Leitwert von Knoten 2 und Knoten 3 * an der Stelle 2-3 der Widerstand der von Masche 2 und Masche 3 gemeinsam durchlaufen wird * an der Stelle 2-3 der Leitwert der von Masche 2 und Masche 3 gemeinsam durchlaufen wird * der Widerstand stets positiv * der Widerstand stets negativ * der Leitwert stets positiv * der Leitwert stets negativ * positiv, wenn Maschenrichtung gleich Zweigrichtung ist * positiv, wenn Maschenrichtung 1 gleich Maschenrichtung 2 ist * negativ, wenn Maschenrichtung 1 gleich Maschenrichtung 2 ist * positiv, wenn Maschenrichtung 1 ungleich Maschenrichtung 2 ist * negativ, wenn Maschenrichtung 1 ungleich Maschenrichtung 2 ist * der Wert unabhängig von der Zweigrichtung * der Wert abhängig von der Zweigrichtung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.3.3.H</b>	Beim Maschenstrom-Verfahren sind einzutragen im Quellvektor an der Stelle 3 * Spannungen der Quellen im Zweig 3 * Ströme der Quellen im Zweig 3 * alle Ströme der Quellen der Masche 3 * alle Spannungen der Quellen der Masche 3 * alle Werte positiv * alle Werte negativ * positiv, wenn Maschenrichtung gleich Richtung der Spannungsquelle * negativ, wenn Maschenrichtung gleich Richtung der Spannungsquelle * positiv, wenn Quelle einen positiven Maschenstrom bewirken würde * negativ, wenn Quelle einen positiven Maschenstrom bewirken würde	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.3.3.I</b>	Beim Maschenstrom-Verfahren für Rechner		
	* sind Matrizenoperationen auszuführen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* sind nur skalare Operationen auszuführen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* sind Zweige mit nur Widerständen erlaubt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* sind Zweige mit nur Spannungsquellen erlaubt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* sind Zweige mit nur Stromquellen erlaubt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* müssen $z - (k - 1)$ Maschen festgelegt werden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* müssen $z + (k - 1)$ Maschen festgelegt werden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* müssen in jedem Zweig die Richtungen von Spannungsquelle und Spannung am Widerstand unterschiedlich sein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* müssen in jedem Zweig die Richtungen von Spannungsquelle und Spannung am Widerstand gleich sein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* wird am besten die Matrix $\vec{C}$ über den Zusammenhang zwischen Maschen- und Zweigströmen bestimmt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält die Matrix R auf der Hauptdiagonalen die Widerstände der Zweige	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält die Matrix R außer der Hauptdiagonalen keine Elemente	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält der Quellvektor die Quellspannungen der Zweige immer positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält der Quellvektor die Quellspannungen der Zweige immer negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält der Quellvektor die Quellspannungen. der Zweige positiv oder negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält der Quellvektor die Quellströme der Zweige immer positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält der Quellvektor die Quellströme der Zweige immer negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält der Quellvektor die Quellströme. der Zweige positiv oder negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Aufgabe 3.3.A:**

Berechnen Sie die Ströme  $I_1$  bis  $I_6$  und die Spannungen  $U_1$  bis  $U_6$  (Hilfsmittel Rechner mit Matrizenrechnung)

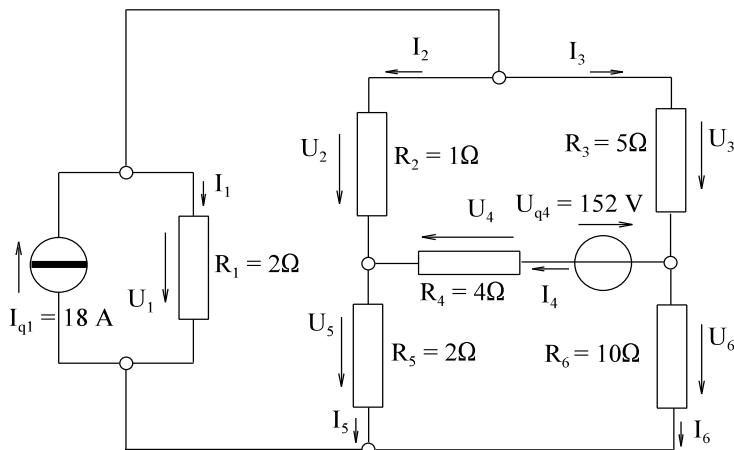
- a) nach dem manuellen Maschenstromverfahren.
- b) nach dem Maschenstromverfahren für Rechner.



**Aufgabe 3.3.B:**

Berechnen Sie die Ströme  $I_1$  bis  $I_6$  und die Spannungen  $U_1$  bis  $U_6$  (Hilfsmittel Rechner mit Matrizenrechnung)

- a) nach dem manuellen Maschenstromverfahren.
- b) nach dem Maschenstromverfahren für Rechner.



### 3.4. Netz-Umwandlung

Mit Hilfe von Netz-Umwandlungen können Ströme und Spannungen in einem Netzwerk bestimmt werden. Die ersten zwei Methoden sind schon bekannt, drei neue sollen noch vorgestellt werden:

- Ersatzwiderstände
- Quellen-Umwandlung (Stromquelle  $\Leftrightarrow$  Spannungsquelle)
- Stern-Dreieck-Umwandlung
- Quellen-Verlegung
- Umwandlung idealer Quellen

#### Prinzip:

Durch mehrere Umwandlungen ist das Netzwerk auf ein Netzwerk mit nur einer Masche umzuformen. In dieser Masche sind Strom und Spannungsabfall zu bestimmen. Das Ergebnis ist weiter oben einzutragen. In den oberen Netzwerken sind dann alle Größen berechenbar. Die Ergebnisse sind weiter oben einzutragen, u.s.w.. Am ursprünglichen Netzwerk angelangt, sind alle Größen berechnet.

#### 3.4.1. Ersatzwiderstand

(Wiederholung)

A] Reihenschaltung

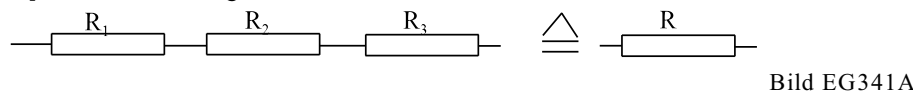


Bild EG341A

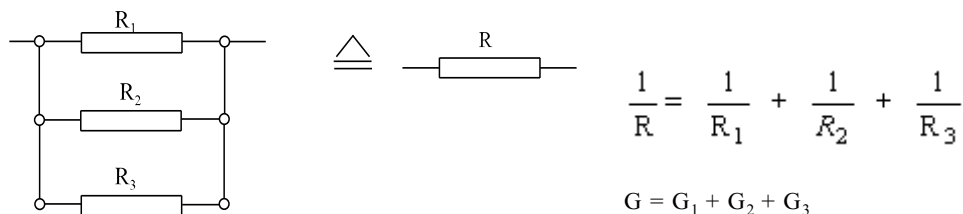
$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3}$$

Bei nur zwei Leitwerten gilt:

$$G = \frac{G_1 * G_2}{G_1 + G_2}$$

B] Parallelschaltung



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

Bild EG341B

Bei zwei Widerständen gilt:

$$R = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

### 3.4.2. Quellenumwandlung

#### 3.4.2.1. Umwandlung Strom- und Spannungsquellen

(Wiederholung)

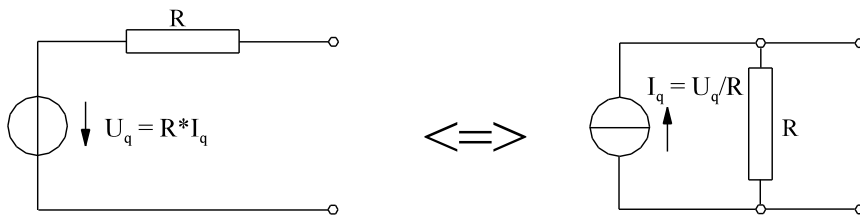


Bild EG3421A

#### 3.4.2.2. Reihenschaltung idealer Spannungsquellen

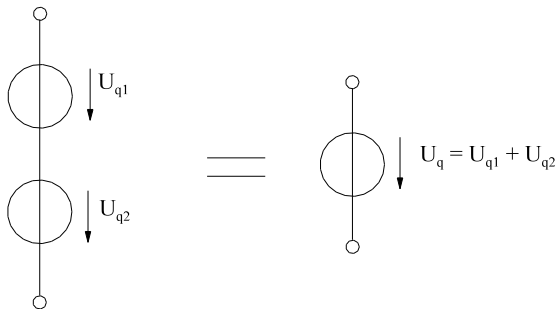


Bild EG3422A

#### 3.4.2.3. Parallelschaltung idealer Stromquellen

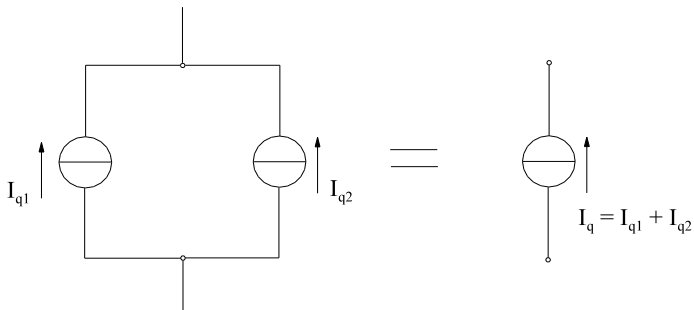


Bild EG3423A

3.4.2.4. Beispiele zur Umwandlung Strom- und Spannungsquellen

**Beispiel 1:**

Für das Beispiel-Netzwerk (Netzwerk 3A) sind mit Hilfe von Quellenwandelung sämtliche Ströme und Spannungen zu bestimmen.

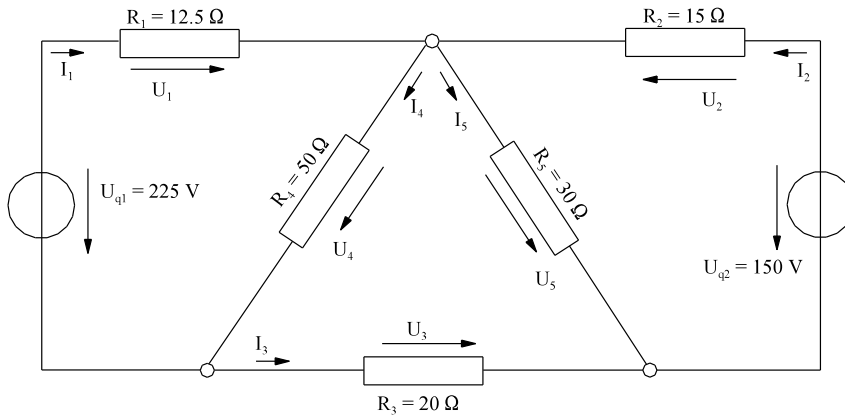


Bild EG3424A

Beim Beispiel-Netzwerk (Bild EG3424A) werden die beiden äußeren Spannungsquellen in Stromquellen umgewandelt, siehe Bild EG3424B.

$$I_{q1} = \frac{U_{q1}}{R_1} = \frac{225 \text{ V}}{12.5 \Omega} = 18 \text{ A} \qquad I_{q2} = \frac{U_{q2}}{R_2} = \frac{150 \text{ V}}{15 \Omega} = 10 \text{ A}$$

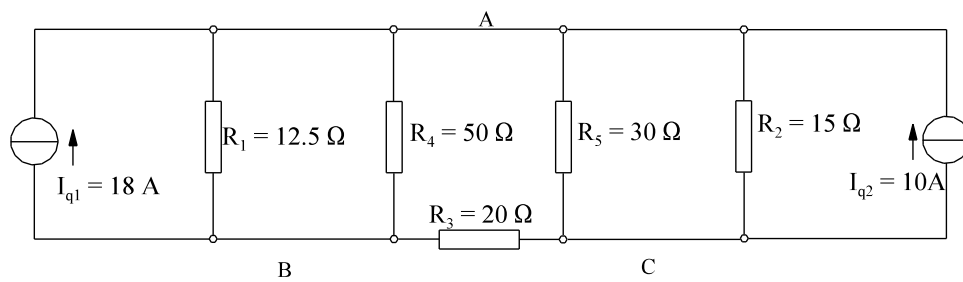


Bild EG3424B

Die Widerstände R1, R4 und R2, R5 werden zusammengefasst, siehe Bild EG3424C.

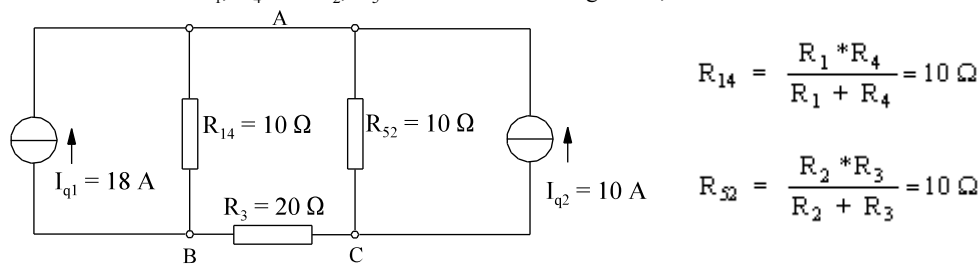


Bild EG3424C

Die beiden Stromquellen in Bild EG3424C werden wieder in Spannungsquellen zurückgewandelt, siehe Bild EG3424D.

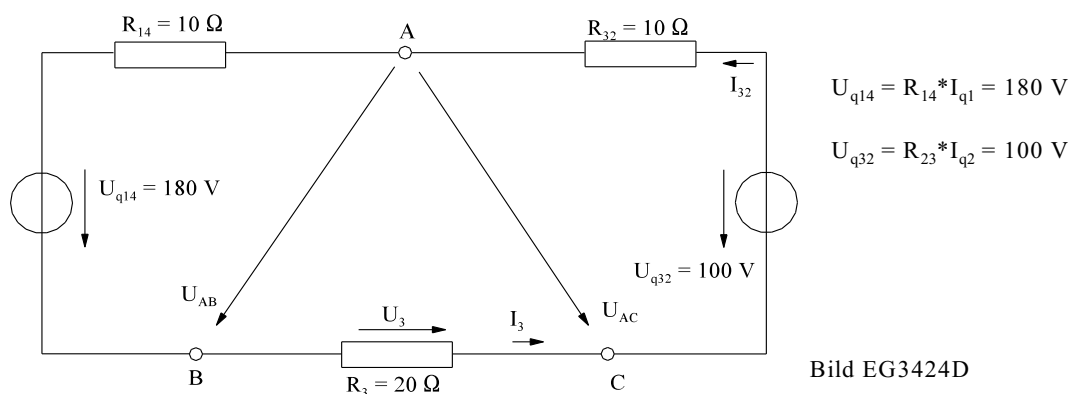


Bild EG3424D

Aus Bild EG3424D lässt sich der Strom  $I_3$  direkt bestimmen

$$I_3 = \frac{U_{q32} - U_{q14}}{R_{14} + R_{32} + R_3} = \frac{180 \text{ V} - 100 \text{ V}}{10 \Omega + 10 \Omega + 20 \Omega} = -2 \text{ A}$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_3 = -2 \text{ A} \cdot 20 \Omega = -40 \text{ V}$$

**Achtung:** Bei Netzumformungen bleiben einige Knotenpunkte erhalten (z.B. A, B, und C), andere Punkte (z.B. D und E) sind im umgeformten Netzwerk nicht mehr enthalten.

Mit  $I_3 = -2 \text{ A}$  können aus Bild EG3424D die folgenden Spannungen berechnet werden:

$$U_{AB} = U_{q14} + R_{14} \cdot I_3 = 180 \text{ V} + 10 \Omega \cdot (-2 \text{ A}) = 160 \text{ V}$$

$$U_{AC} = U_{q32} - R_{32} \cdot I_3 = 100 \text{ V} - 10 \Omega \cdot (-2 \text{ A}) = 120 \text{ V}$$

Da die Punkte A, B und C auch im ursprünglichen Netzwerk, Bild EG3424A, enthalten sind, können die folgenden Spannungen übernommen werden:

$$U_4 = U_{AB} = 160 \text{ V}$$

$$U_5 = U_{AC} = 120 \text{ V}$$

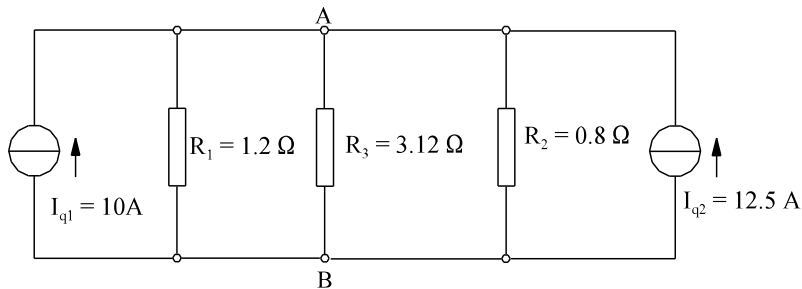
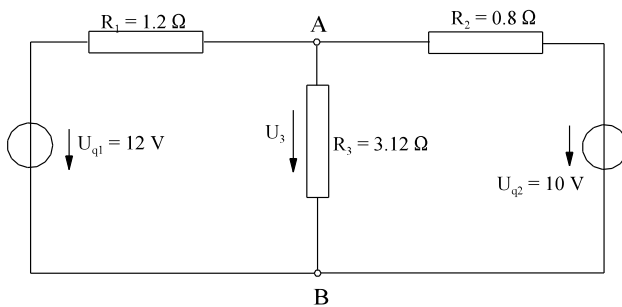
Aus zwei Maschenumläufen lassen sich die zwei restlichen Spannungen berechnen:

$$U_1 = U_{q1} - U_4 = 225 \text{ V} - 160 \text{ V} = 65 \text{ V}$$

$$U_2 = U_{q2} - U_5 = 150 \text{ V} - 120 \text{ V} = 30 \text{ V}$$

### Beispiel 2: (Netzwerk 3B)

Beim Netzwerk 3B sind durch Quellen-Umwandlung sämtliche Ströme und Spannungen zu bestimmen.

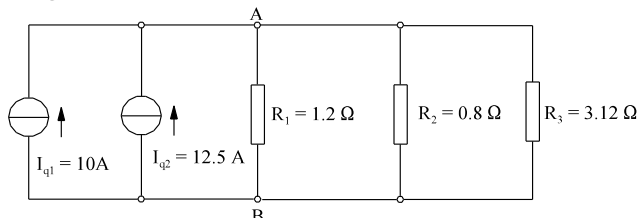


$$I_{q1} = \frac{U_{q1}}{R_1} = \frac{12 \text{ V}}{1.2 \Omega} = 10 \text{ A}$$

$$I_{q2} = \frac{U_{q2}}{R_2} = \frac{10 \text{ V}}{0.8 \Omega} = 12.5 \text{ A}$$

### Möglichkeit 1:

Beide Quellen zusammenfassen:



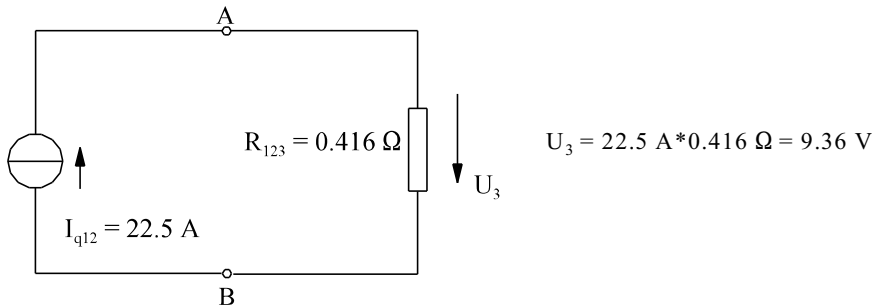
$$10.8 \text{ V} = 22.5 \text{ A} \cdot 0.48 \Omega$$

$$U_3 = 10.8 \text{ V} \cdot \frac{3.12 \Omega}{3.12 \Omega + 0.48 \Omega} = 9.36 \text{ V}$$

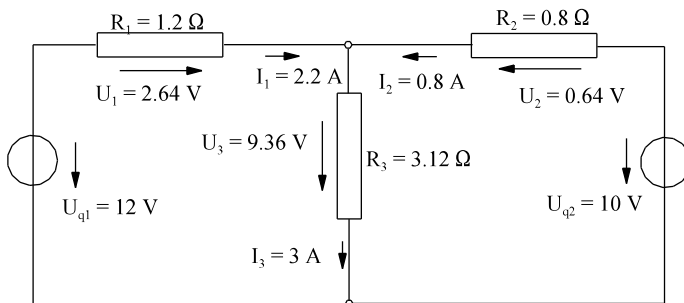
**Hinweis:** Werden die elektrischen Größen an nur einem Zweig gesucht, kann das restliche Netzwerk durch eine Quelle mit Innenwiderstand ersetzt werden. Dieses Verfahren soll im Abschnitt 3.6 gesondert behandelt werden.

**Möglichkeit 2:** Alle drei Widerstände und die beiden Quellen zusammenfassen.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1.2 \Omega} + \frac{1}{0.8 \Omega} + \frac{1}{3.12 \Omega} \quad \Rightarrow \quad R = 0.416 \Omega$$



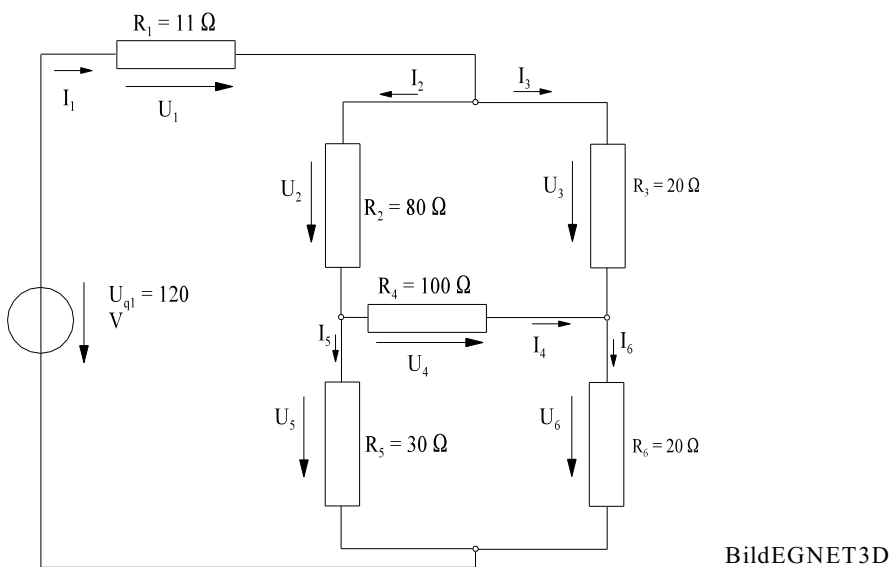
Die nach zwei verschiedenen Möglichkeiten bestimmte Spannung  $U_3$  kann in das Original-Netzwerk eingetragen werden. Alle anderen Ströme und Spannungen lassen sich dann mit Hilfe von ohmschen Gesetz, Maschen- und Knotenregeln bestimmen.



### 3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung

#### 3.4.3.1. Vorbetrachtung

Das Netzwerk 3D soll mit Hilfe von Umwandlungsmethoden berechnet werden, siehe Bild EGNET3D.



BildEGNET3D

**Fazit:** Mit Quellen-Umwandlung und Ersatzwiderstand kann das Netzwerk nicht gelöst werden. Es sind noch weitere Umwandlungs-Verfahren erforderlich.



3.4.3.2. Dreieck-Stern-Umwandlung

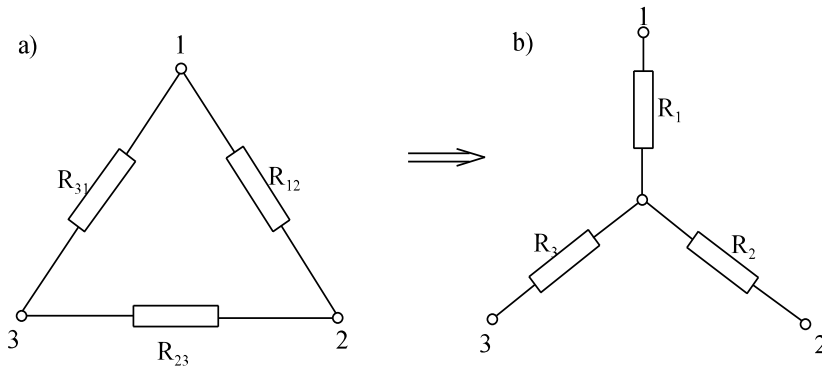


Bild EG3432A: a) Dreieck-Schaltung

b) Stern-Schaltung

Die beiden Schaltungen Stern und Dreieck nach Bild EG3432A sollen gegeneinander austauschbar sein. Wann ist dieses möglich? Antwort: Genau dann, wenn die Schaltungen nach außen hin das gleiche Verhalten aufweisen. Dieses muss für alle Betriebspunkte gelten. Es sind die drei Elemente ( $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$ ) zu bestimmen. Drei zu bestimmende Elemente erfordern drei Bestimmungsgleichungen. Wenn die Umwandlung für alle Betriebspunkte gilt, muss die Umwandlung auch für drei bestimmte Betriebspunkte gelten. Aus diesen drei Betriebspunkten ergeben sich drei Gleichungen. Wenn jeweils eine Klemme offen ist, kann der Widerstand der zwei restlichen Klemmen verglichen werden.

$$\begin{aligned}
 3 \text{ offen} & \Rightarrow R_{12} \parallel (R_{23} + R_{31}) = R_1 + R_2 = \frac{R_{12} * R_{23} + R_{12} * R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\
 1 \text{ offen} & \Rightarrow R_{23} \parallel (R_{12} + R_{31}) = R_2 + R_3 = \frac{R_{12} * R_{23} + R_{23} * R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\
 2 \text{ offen} & \Rightarrow R_{31} \parallel (R_{12} + R_{23}) = R_1 + R_3 = \frac{R_{31} * R_{12} + R_{23} * R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}
 \end{aligned}$$

Oberes Gleichungssystem für die Variablen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  kann in Matrix-Form geschrieben werden. Der Nenner der rechten Seite ist der gleiche. Der Zähler enthält die Produkte  $R_{12} * R_{23}$ ,  $R_{23} * R_{31}$  und  $R_{31} * R_{12}$ . Diese Produkte werden als Vektor ebenfalls ausgeklammert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{12} * R_{31} \\ R_{12} * R_{23} \\ R_{31} * R_{23} \end{bmatrix}$$

Die Lösung erfolgt normalerweise durch Invertieren und Multiplizieren der oberen linken Matrix. Da aber auf der rechten Seite die gleiche Matrix vorhanden ist, ergibt auch dessen Inversion von links multipliziert die Einheitsmatrix. Die beiden Matrizen lassen sich kürzen, da die Determinante nicht null ist (ohne Beweis).

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \begin{bmatrix} R_{12} * R_{31} \\ R_{12} * R_{23} \\ R_{31} * R_{23} \end{bmatrix}$$

**Interpretation der oberen Formel:**

Der Stern-Widerstand eines Zweiges ergibt sich, in dem die zwei anliegenden Dreieck-Widerstände miteinander multipliziert werden und durch die Summe der drei Dreieck-Widerstände dividiert werden.

**Sonderfall bei gleichen Widerständen:**

$$R_{\Delta} = R_{12} = R_{23} = R_{31}$$

$$R_y = R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R_{\Delta} * R_{\Delta}}{R_{\Delta} + R_{\Delta} + R_{\Delta}}$$

$$R_y = \frac{R_{\Delta}}{3}$$

**Beispiel:** (Netzwerk 3D)

In der Vorbetrachtung (siehe Bild EGNET3D) war das Netzwerk 3D durch Umformung nicht lösbar. Die Widerstände  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  bilden ein Dreieck, welches umzuformen ist, siehe Bild EG3432B.

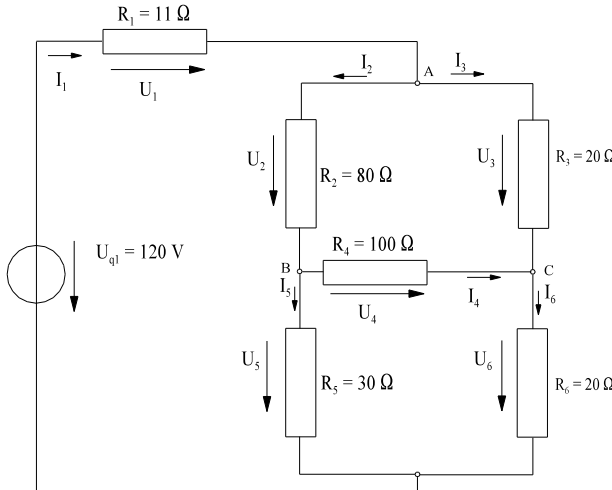


Bild EG3432B

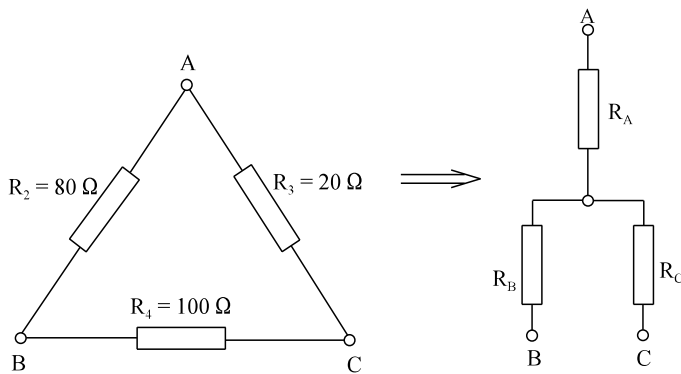


Bild EG3432C

$$\sum R = R_2 + R_3 + R_4 = 80 \Omega + 20 \Omega + 100 \Omega = 200 \Omega$$

$$R_A = \frac{R_2 * R_3}{\sum R} = \frac{80 \Omega * 20 \Omega}{200 \Omega} = 8 \Omega$$

$$R_B = \frac{R_2 * R_4}{\sum R} = \frac{80 \Omega * 100 \Omega}{200 \Omega} = 40 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_4 * R_3}{\sum R} = \frac{100 \Omega * 20 \Omega}{200 \Omega} = 10 \Omega$$

Das Dreieck ABC in Bild EG3432B wird ersetzt durch das Stern-ESB in Bild EG3432C, siehe Bild EG3432D.

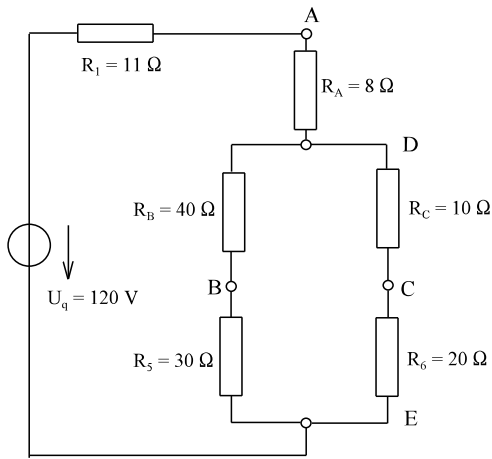
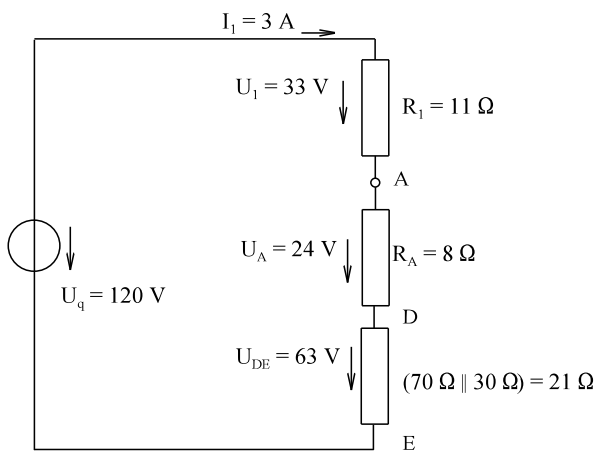


Bild EG3432D

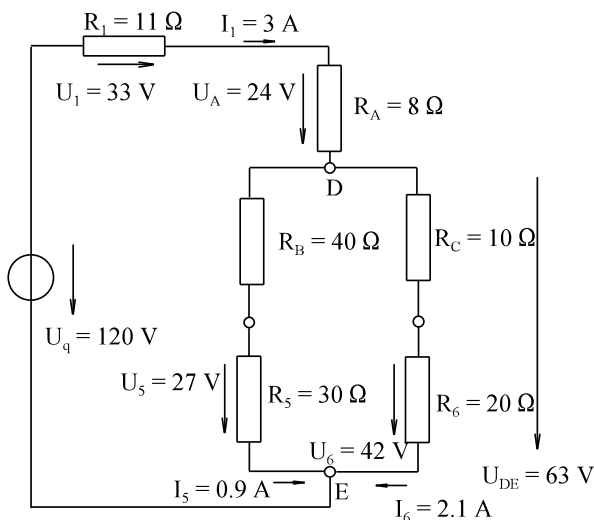
Die Widerstände  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $R_5$  und  $R_6$  in Bild EG3432D werden zu einem Ersatzwiderstand zusammengefasst, siehe Bild EG3432E. Die Knotenpunkte B und C sind in Bild EG3432E nicht mehr vorhanden.



$$I_1 = \frac{120 \text{ V}}{11 \Omega + 8 \Omega + 21 \Omega} = 3 \text{ A}$$

Bild EG3432E

Aus Bild EG3432E lassen sich der Strom  $I_1$  und die Spannung  $U_1$  direkt bestimmen. Alle anderen Ströme und Spannungen aus Bild EG3432B sind in Bild EG3432E nicht vorhanden. Mit den Werten  $U_1$ ,  $I_1$  in das Originalnetzwerk, Bild EG3432B, eingetragen lassen sich in diesem Fall die anderen Größen nicht berechnen. Es muss dazu eine Zwischen-Umwandlung aus Bild EG3432D nochmals berechnet werden, siehe Bild EG3432F. In Bild EG3432D/EG3432F sind die Widerstände  $R_5/R_6$  Originalwiderstände. Die Spannung  $U_{DE}$  kann aus Bild EG3432E bestimmt werden und nach Bild EG3432F übertragen werden.



Mit Hilfe von ohmschen Gesetz, Maschenumlauf und Spannungsteiler lassen sich die in Bild EG3432F eingetragenen Originalgrößen  $U_5$ ,  $I_5$ ,  $U_6$  und  $I_6$  berechnen. Mit diesen Information, eingetragen in Bild EG3432G, lassen sich nun alle Größen des Netzwerkes nach Bild EG3432G berechnen.

Bild EG3432F

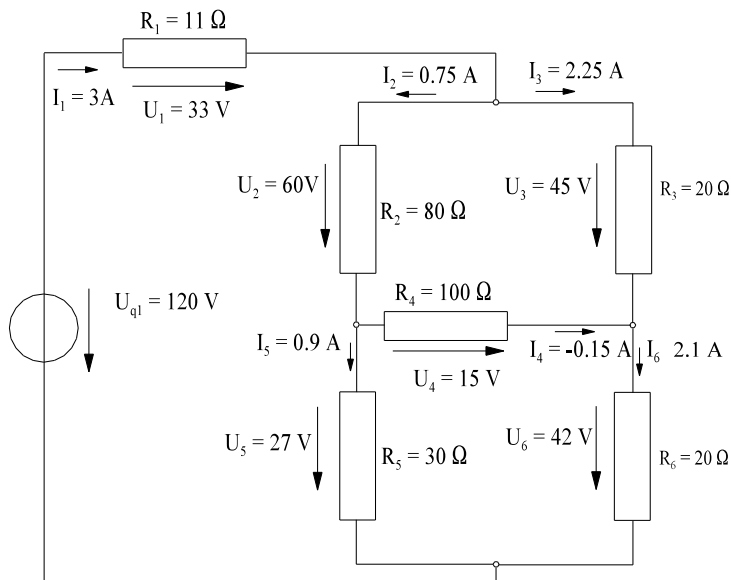


Bild EG3432G

**Fazit:** Bei einer Netzumwandlung bleiben einige Knotenpunkte erhalten, andere nicht.

### 3.4.3.3. Stern-Dreieck-Umwandlung

Bei der Dreieck-Stern-Umwandlung wurden drei Gleichungen aufgestellt für drei Betriebspunkte mit jeweils einer offenen Klemme. Dieses Gleichungssystem war für die Auflösung nach  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  linear leicht auf lösbar. In dem Gleichungssystem waren aber auch die Dreieck-Widerstände  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  und  $R_{31}$  vorhanden. Die Auflösung des Gleichungssystems nach  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  und  $R_{31}$  ist nichtlinear und etwas aufwendiger. Für die Stern-Dreieck-Umwandlung nach Bild EG3433A ist das Ergebnis unten angegeben.

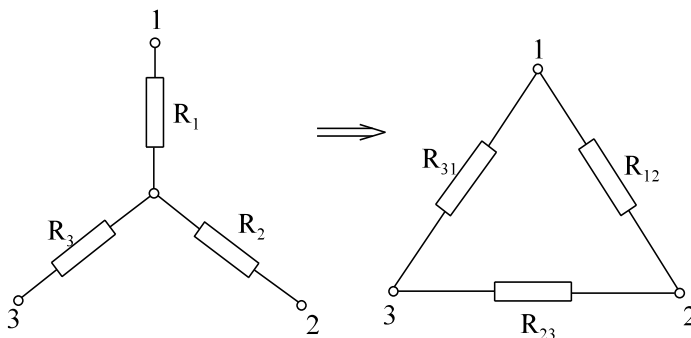


Bild EG3433A

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}$$

#### Interpretation der Umwandlungs-Formel:

Um den Dreieck-Widerstand zwischen zwei Klemmen zu berechnen, werden die beiden anliegenden Stern-Widerstände addiert und dazu noch das Produkt der anliegenden Stern-Widerstände dividiert durch den gegenüberliegenden Stern-Widerstand.

**Beispiel:**

Das Netzwerk 3E, siehe Bild EG3433B, ist durch Stern-Dreieck-Umformung zu lösen.

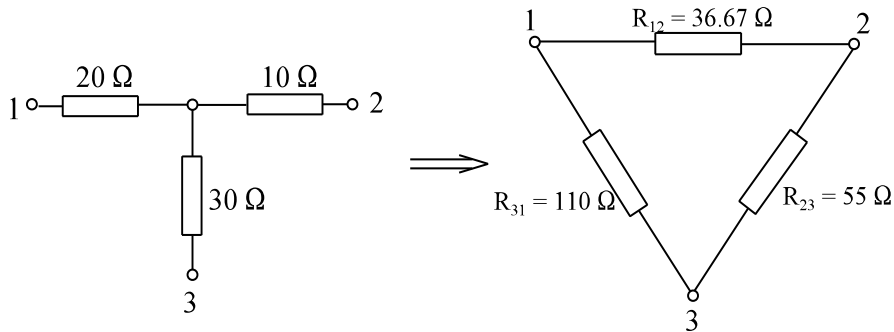
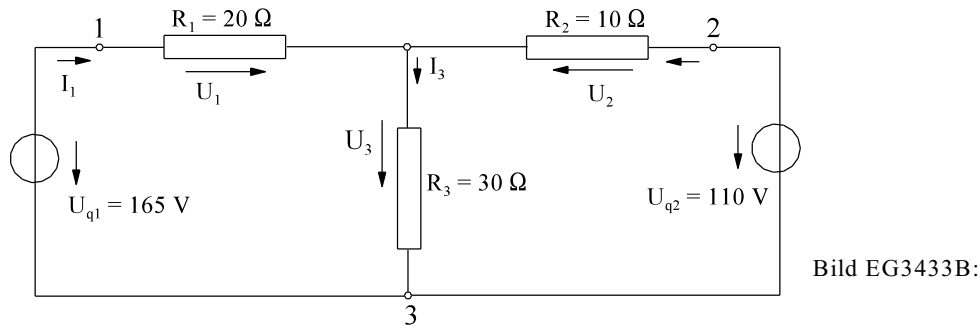


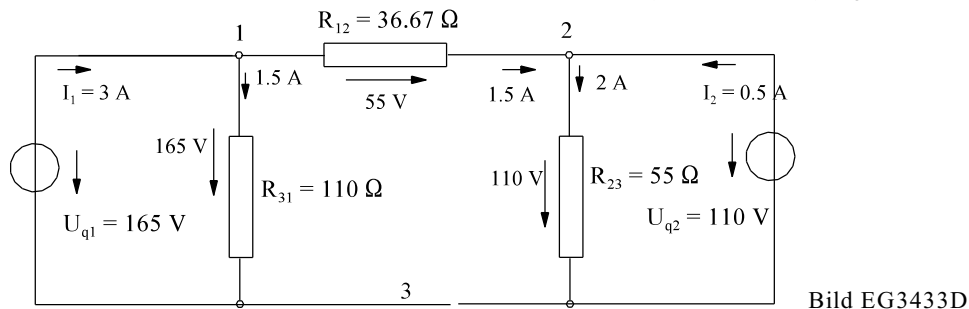
Bild EG3433C: Stern aus Netzwerk 3E

$$R_{12} = 20 \, \Omega + 10 \, \Omega + \frac{20 \, \Omega \cdot 10 \, \Omega}{30 \, \Omega} = 36.67 \, \Omega$$

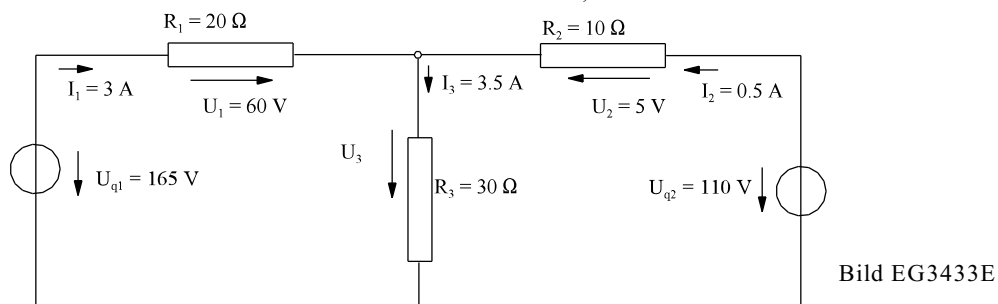
$$R_{31} = 20 \, \Omega + 30 \, \Omega + \frac{20 \, \Omega \cdot 30 \, \Omega}{10 \, \Omega} = 110 \, \Omega$$

$$R_{23} = 30 \, \Omega + 10 \, \Omega + \frac{30 \, \Omega \cdot 10 \, \Omega}{20 \, \Omega} = 55 \, \Omega$$

Einsetzen des Dreiecks aus Bild EG3433C in Netzwerk 3E (Bild EG3433B) ergibt das Bild EG3433D.



Mit Hilfe des ohmschen Gesetzes, Maschenumlauf und Knotensumme können die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  des Bildes EG3433D bestimmt werden. Die Größen  $I_1$  und  $I_2$  sind die einzigen Original-Netzwerkgrößen aus Bild EG3433B. Diese eingetragen in das Original-Netzwerk, lassen sich die restlichen Größen mit Hilfe des ohmschen Gesetzes, Knotensumme oder Maschenumlauf leicht berechnen, siehe Bild EG3433E.



### 3.4.4. Verlegung idealer Strom-Quellen

**Prinzip:**

Ein dritter Punkt, der von der Quelle nicht beeinflusst ist, bekommt einen zufließenden und einen rausfließenden Strom gleicher Größe, siehe Bild EG344A. Die Gleichung der Stromsumme dieses Knotens wird danach nicht verändert, weil der raus- und reinfließende Strom sich wieder aufheben.

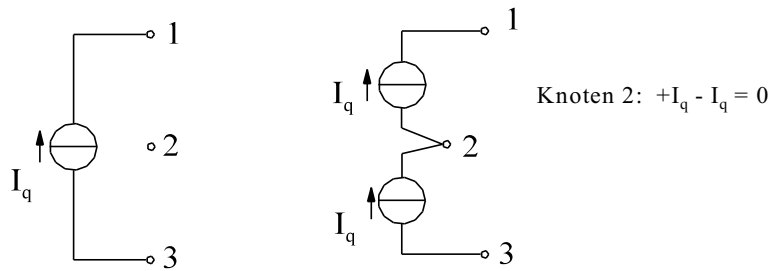


Bild EG344A

**Beispiel:** Das Netzwerk 3K soll mit Umformungsmethoden gelöst werden.

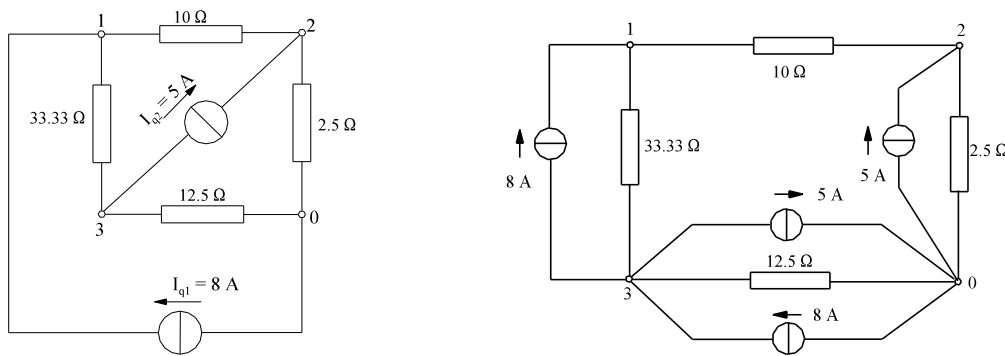
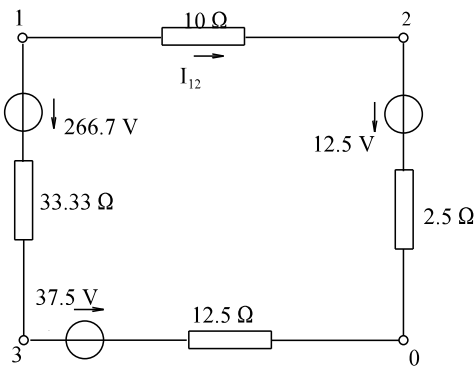


Bild EG344B



$$I_{12} = \frac{266.7 \text{ V} - 12.5 \text{ V} + 37.5 \text{ V}}{10 \text{ } \Omega + 2.5 \text{ } \Omega + 12.5 \text{ } \Omega + 33.33 \text{ } \Omega}$$

$$I_{12} = \frac{291.7 \text{ A}}{58.33 \text{ } \Omega} = 5 \text{ A}$$

Bild EG344D

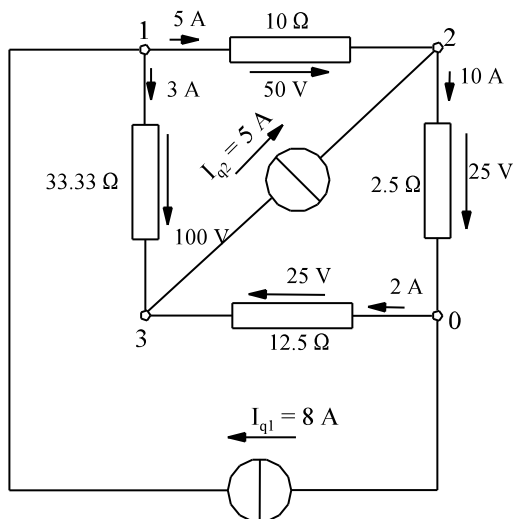


Bild EG344E

### 3.4.5. Umwandlung idealer Quellen

Eine ideale Spannungsquelle hat den Innenwiderstand Null, ebenso ist der Innenwiderstand einer idealen Stromquelle unendlich. Beim Maschenstrom-Verfahren wird gefordert, dass alle Stromquellen in Spannungsquellen umzurechnen sind, dieses ist bei idealen Quellen nicht möglich. Auch bei Netz-Umwandlung ist es u.U. nötig eine ideale Quelle umzuwandeln. Das Prinzip: Um endliche Werte zu bekommen, wird ein gedachter negativer Widerstand eingeführt.

#### 3.4.5.1. Umwandlung idealer Spannungsquellen

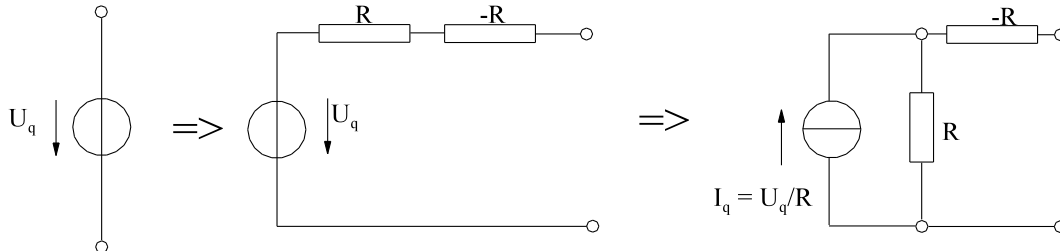


Bild EG3451A

Um den Widerstand Null zu erreichen, wird zum Widerstand  $R$  ein negativer Widerstand  $-R$  des gleichen Betrages in Reihe geschaltet. Der Wert von  $R$  ist im Prinzip beliebig. Man wählt diesen in der Größenordnung der anderen im Netz vorhandenen Widerstände.

#### 3.4.5.2. Umwandlung idealer Stromquellen

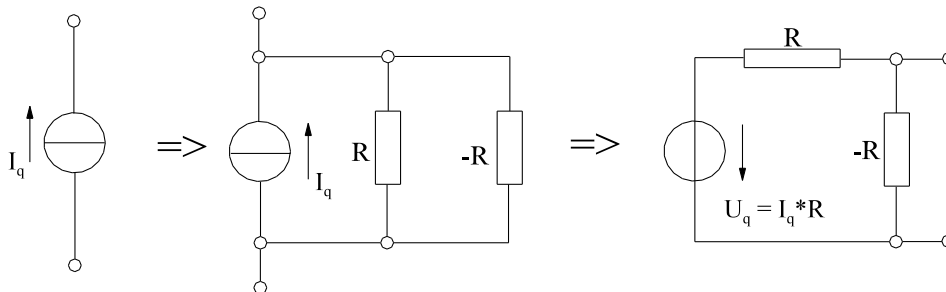


Bild EG3452A

Zur Stromquelle nach Bild EG3452A wird ein beliebiger Widerstand  $R$  parallel geschaltet. Damit sich der Gesamtleitwert Null ergibt, wird zum Widerstand  $R$  ein negativer Widerstand  $-R$  des gleichen Betrages parallel geschaltet. Der Wert von  $R$  ist wieder beliebig wählbar, sollte aber in Größenordnung der anderen im Netz vorhandenen Widerstände sein.

**Beispiel:**

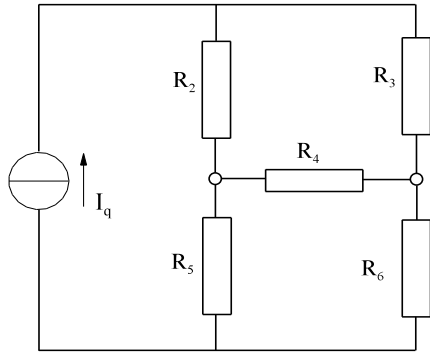


Bild EG3452B

Für das obere Netzwerk, Bild EG3452B, ist ein Gleichungssystem nach dem Maschenstrom-Verfahren aufzustellen. Dazu ist es erforderlich die ideale Strom-Quelle des Bild EG3452B umzuwandeln, Ergebnis siehe in Bild EG3452C.

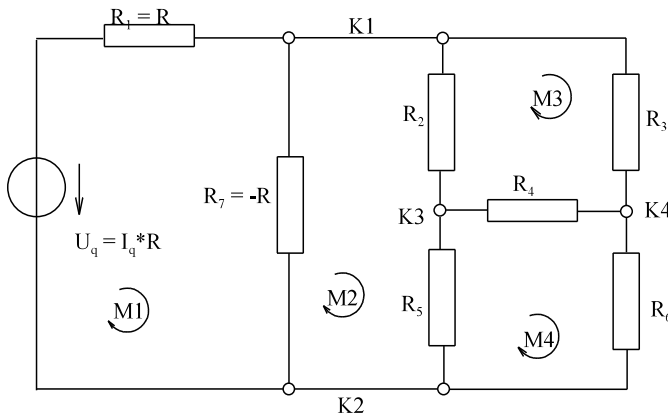


Bild EG3452C

Durch die Umwandlung ergibt sich ein weiterer Zweig, wodurch auch ein zusätzlicher Maschenstrom erforderlich ist.

$z = 7$

$k = 4$

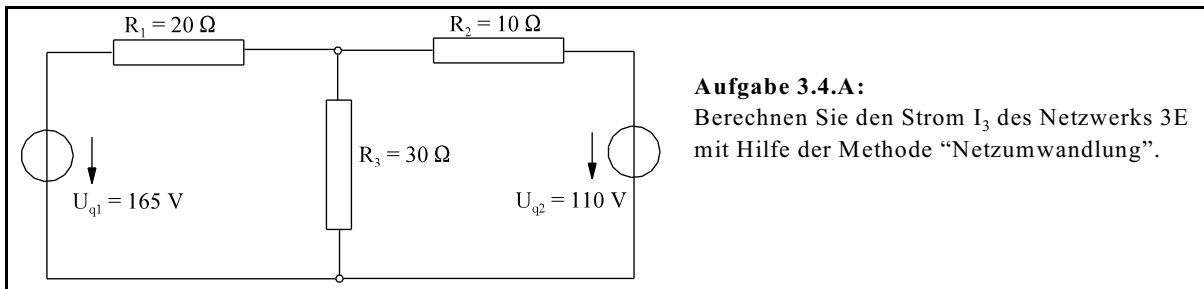
$m = z - (k - 1) = 7 - (4 - 1) = 4$

	1'	2'	3'	4'
1'	$R - R = 0$	$+R$	$0$	$0$
2'	$+R$	$R_2 + R_5 - R$	$-R_2$	$-R_5$
3'	$0$	$-R_2$	$R_2 + R_3 + R_4$	$-R_4$
4'	$0$	$-R_5$	$-R_4$	$R_4 + R_5 + R_6$

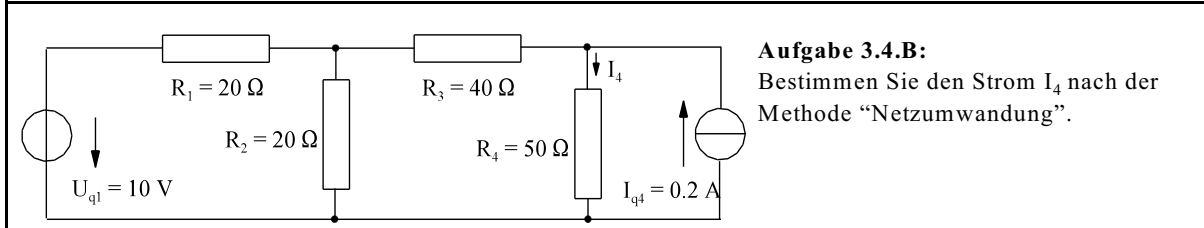
$\vec{I}'_1$	*	=	$I_q * R$
$\vec{I}'_2$			0
$\vec{I}'_3$			0
$\vec{I}'_4$			0



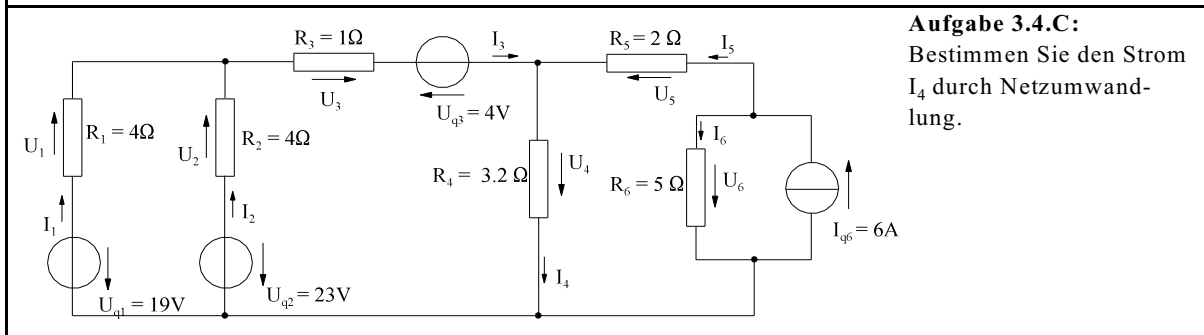
### 3.4.6. Aufgaben zu Abschnitt 3.4



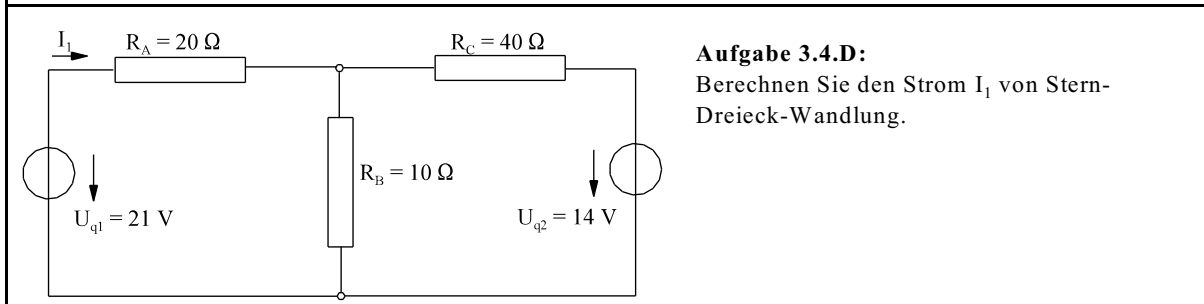
**Aufgabe 3.4.A:**  
Berechnen Sie den Strom  $I_3$  des Netzwerks 3E mit Hilfe der Methode "Netzumwandlung".



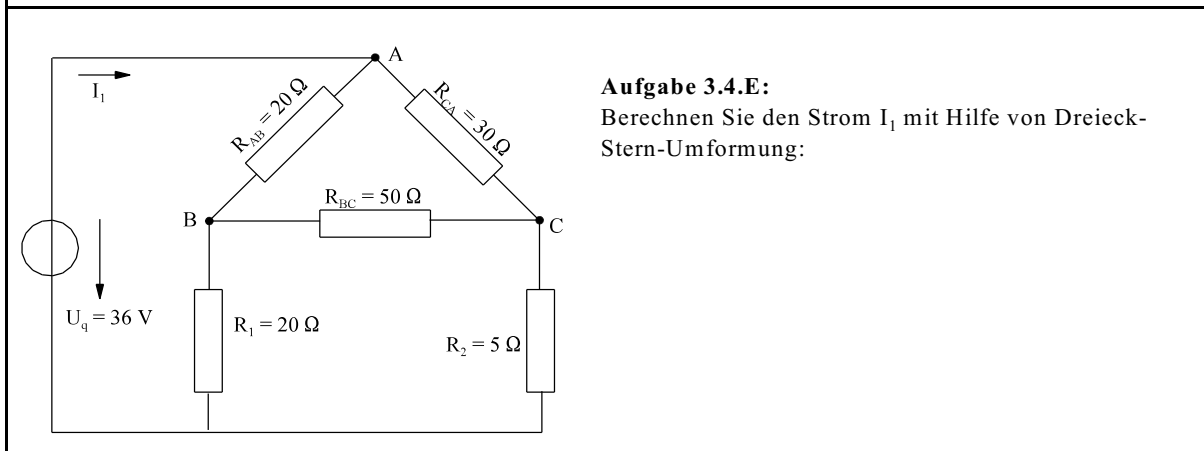
**Aufgabe 3.4.B:**  
Bestimmen Sie den Strom  $I_4$  nach der Methode "Netzumwandlung".



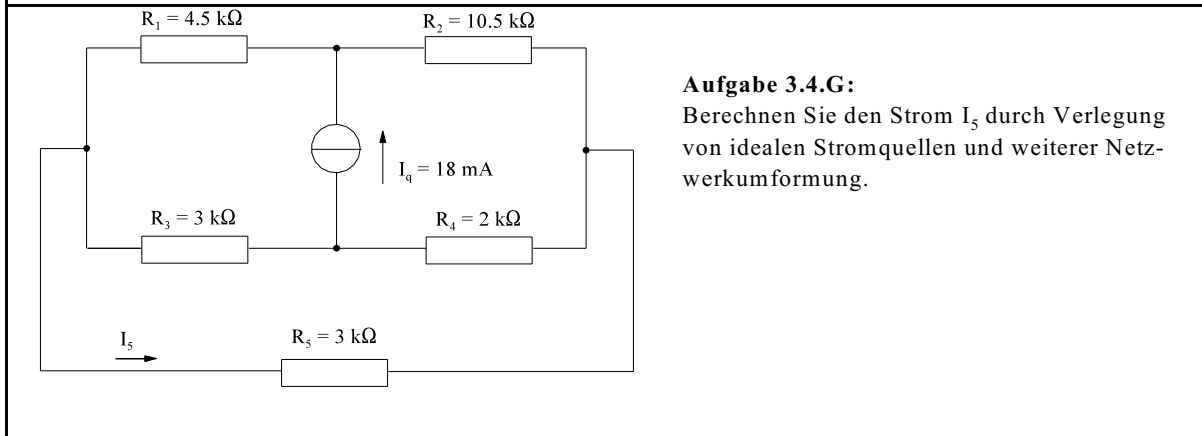
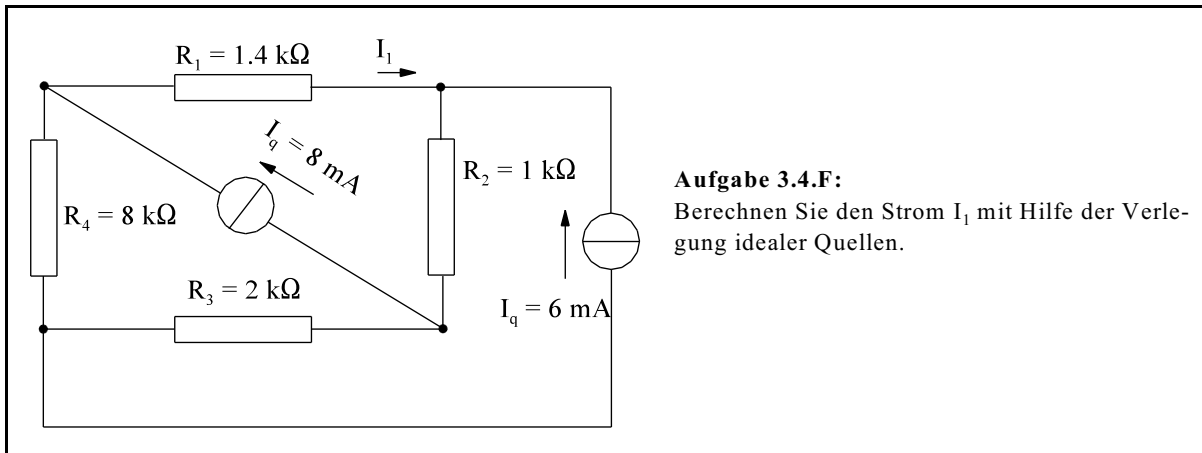
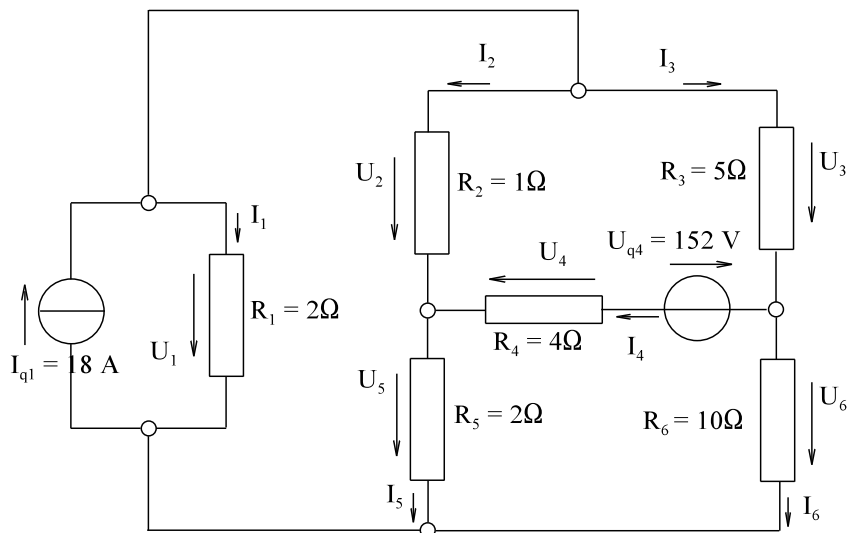
**Aufgabe 3.4.C:**  
Bestimmen Sie den Strom  $I_4$  durch Netzumwandlung.



**Aufgabe 3.4.D:**  
Berechnen Sie den Strom  $I_1$  von Stern-Dreieck-Wandlung.



**Aufgabe 3.4.E:**  
Berechnen Sie den Strom  $I_1$  mit Hilfe von Dreieck-Stern-Umformung:

**Aufgabe 3.4.H:**

- $U_1$ -Berechnung durch Netzumwandlung (Hinweis:  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  Dreieck-Stern wandeln)
- $I_4$ -Berechnung durch Netzumwandlung (Hinweis:  $R_2$ ,  $R_5$  und  $R_4$  Dreieck-Stern wandeln und Quellenverlegung anwenden)

### 3.5. Überlagerungssatz

**Prinzip:** Bei einem linearen Netzwerk lassen sich die Wirkungen der einzelnen Quellen überlagern.

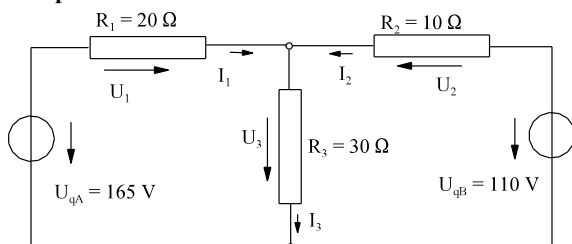
Schema:	
<b>gegeben:</b>	Netzwerk mit n-Quellen
A]	Für jede Quelle der n Quellen wird die Wirkung auf die einzelnen Größen Strom und Spannung in den Zweigen betrachtet. Dazu werden die eben nicht betrachteten Quellen wie folgt behandelt: - nicht betrachtete <u>ideale</u> Spannungsquellen kurzschließen - nicht betrachtete <u>ideale</u> Stromquellen öffnen
B]	Die Wirkungen der einzelnen Quellen in den Zweigen überlagern, d.h. aufsummieren.
C]	Die Quellen am besten mit den Indizes A, B, C, usw. durch numerieren

**Hinweis 1:** Anstatt der mathematischen Überlagerung durch Addition, können auch die Wirkungen der einzelnen Quellen in verschiedenen Farben in das Original-Netzwerk eingezeichnet werden. Die Summe wird dann im Netzwerk durch Addition in einer weiteren Farben eingetragen.

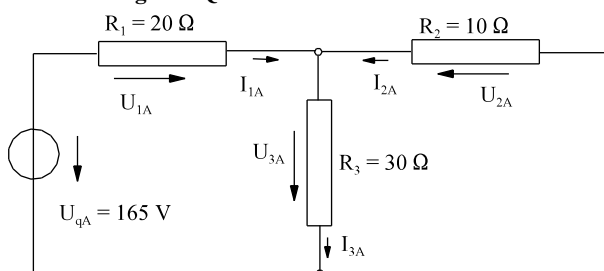
**Hinweis 2:** Zur Ermittlung der Auswirkung einer Quelle können auch Netz-Umformungen vorgenommen werden (Ersatzwiderstand, Stern-Dreieck). Dann müssen mehrere ESBs pro Quelle gezeichnet werden.

**Hinweis 3:** Die Indizierung der Quellen mit A, B.. kann auch mit 1, 2 ... erfolgen. Bei alphabetischen Indizierung ist eine Vertauschung der Indizes erlaubt, da die Zweige numerische Indizierung aufweisen. Bei doppelter numerischer Indizierung ist auf die Reihenfolge der Indizes zu achten. Es kann auch die Überlagerung aus den n ESBs erfolgen, siehe Hinweis 1.

**Beispiel 1:** Das Netzwerk 3E ist mit Hilfe des Überlagerungsprinzips zu lösen.



**Auswirkung der Quelle A:**



$$I_{1A} = \frac{U_{qA}}{R_1 + \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{165 \text{ V}}{20 \Omega + \frac{10 \Omega * 30 \Omega}{10 \Omega + 30 \Omega}} = 6 \text{ A}$$

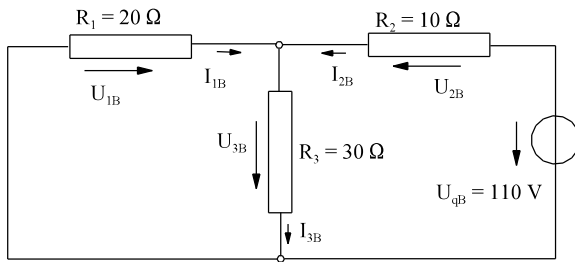
$$I_{3A} = I_{1A} * \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 6 \text{ A} * \frac{10 \Omega}{10 \Omega + 30 \Omega} = 1.5 \text{ A}$$

$$I_{2A} = I_{3A} - I_{1A} = 1.5 \text{ A} - 6 \text{ A} = -4.5 \text{ A}$$

$$U_{1A} = 120 \text{ V}$$

$$U_{2A} = -45 \text{ V}$$

$$U_{3A} = 45 \text{ V}$$

**Auswirkung der Quelle B:**

$$I_{2B} = \frac{U_{qB}}{R_2 + \frac{R_1 * R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{100 \text{ V}}{10 \Omega + \frac{20 \Omega * 30 \Omega}{20 \Omega + 30 \Omega}} = 5 \text{ A}$$

$$I_{3B} = I_{2B} * \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 5 \text{ A} * \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 30 \Omega} = 2 \text{ A}$$

$$I_{1B} = I_{3B} - I_{2B} = 2 \text{ A} - 5 \text{ A} = -3 \text{ A}$$

$$U_{1B} = -60 \text{ V}$$

$$U_{2B} = 50 \text{ V}$$

$$U_{3B} = 60 \text{ V}$$

**Überlagerung:**

$$I_1 = I_{1A} + I_{1B} = 6 \text{ A} - 3 \text{ A} = 3 \text{ A}$$

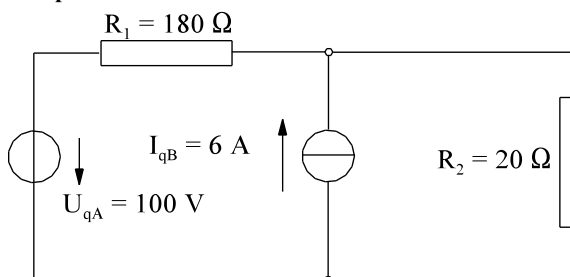
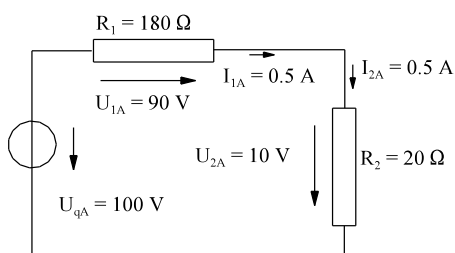
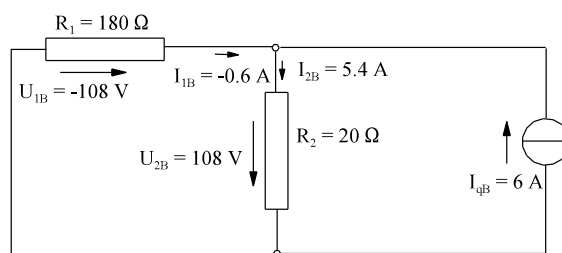
$$I_2 = I_{2A} + I_{2B} = -4.5 \text{ A} + 5 \text{ A} = 0.5 \text{ A}$$

$$I_3 = I_{3A} + I_{3B} = 1.5 \text{ A} + 2 \text{ A} = 3.5 \text{ A}$$

$$U_1 = U_{1A} + U_{1B} = 120 \text{ V} - 60 \text{ V} = 60 \text{ V}$$

$$U_2 = U_{2A} + U_{2B} = -45 \text{ V} + 50 \text{ V} = 5 \text{ V}$$

$$U_3 = U_{3A} + U_{3B} = 45 \text{ V} + 60 \text{ V} = 105 \text{ V}$$

**Beispiel 2:****Auswirkung der Quelle A:****Auswirkung der Quelle B:**

$$I_{2B} = I_{qB} * \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 6 \text{ A} * \frac{180 \Omega}{180 \Omega + 20 \Omega} = 5.4 \text{ A}$$

**Überlagerung der Quellen A und B:**

$$I_1 = I_{1A} + I_{1B} = 0.5 \text{ A} - 0.6 \text{ A} = -0.1 \text{ A}$$

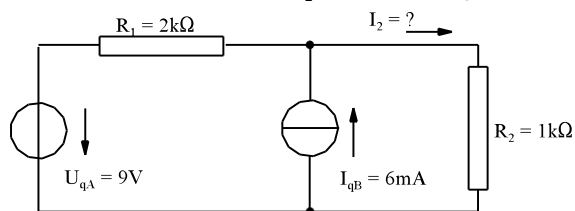
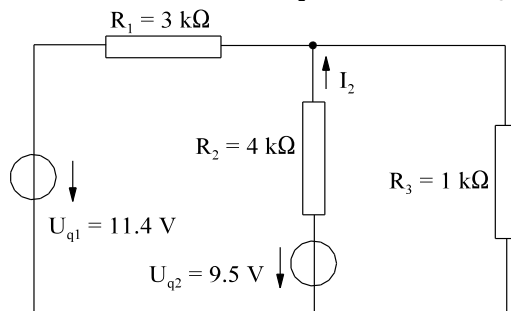
$$I_2 = I_{2A} + I_{2B} = 0.5 \text{ A} + 5.4 \text{ A} = 5.9 \text{ A}$$

$$U_1 = U_{1A} + U_{1B} = 90 \text{ V} - 108 \text{ V} = -18 \text{ V}$$

$$U_2 = U_{2A} + U_{2B} = 10 \text{ V} + 108 \text{ V} = 118 \text{ V}$$

## 3.5.1. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 3.5

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.3.5.A	Das Überlagerungsprinzip eignet sich für:		
	* lineare Netze	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* nichtlineare Netze	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.3.5.B	Bei einem Netzwerk mit $z = 8$ Zweigen, $k = 4$ Knoten und $n = 3$ Quellen muss das Netzwerk nach dem Überlagerungsprinzip:		
	* $z = 8$ mal berechnet werden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* $k = 4$ mal berechnet werden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* $n = 3$ mal berechnet werden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.3.5.C	Beim Überlagerungsprinzip werden nicht betrachtete		
	* reale Spannungsquellen kurzgeschlossen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* ideale Spannungsquellen kurzgeschlossen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* reale Spannungsquellen offen gelassen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* ideale Spannungsquellen offen gelassen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* reale Stromquellen kurzgeschlossen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* ideale Stromquellen kurzgeschlossen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* reale Stromquellen offen gelassen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* ideale Stromquellen offen gelassen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.3.5.D	Bei der Berechnung von Netzen nach dem Überlagerungsprinzip werden:		
	* alle Quellen auf einmal betrachtet	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* alle Quellen einzeln betrachtet	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Aufgabe 3.5.A:**Bestimmen Sie den Strom  $I_2$  der unten dargestellten Schaltung nach dem Überlagerungsprinzip.**Aufgabe 3.5.B:**Berechnen Sie den Strom  $I_2$  nach dem Überlagerungsprinzip.

### 3.6. Ersatzquelle

#### 3.6.1. Mathematische Theorie

Ist bei einem Netzwerk nur ein bestimmter Zweig von Interesse, kann das Gleichungssystem der Dimension z aufgeteilt werden:

M <sub>11</sub>	M <sub>12</sub>	M <sub>13</sub>	...	...	M <sub>1z</sub>
M <sub>21</sub>	M <sub>22</sub>	M <sub>23</sub>	...	...	M <sub>2z</sub>
M <sub>31</sub>	M <sub>32</sub>	M <sub>33</sub>	...	...	M <sub>3z</sub>
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
M <sub>z1</sub>	M <sub>z2</sub>	M <sub>z3</sub>	...	...	M <sub>zz</sub>

I <sub>1</sub>
I <sub>2</sub>
I <sub>3</sub>
...
...
I <sub>z</sub>

 $=$ 

U <sub>q1</sub>
U <sub>q2</sub>
U <sub>q3</sub>
...
...
U <sub>qz</sub>

$$\bar{M} * \bar{I} = \bar{U}_q \tag{A}$$

Gesucht ist der Strom im Zweig 1. Die obere Matrix und die zwei Vektoren werden aufgeteilt:

$$\bar{M} = \begin{matrix} R_1 & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{matrix} \quad \bar{I} = \begin{matrix} I_1 \\ \bar{I}_2 \end{matrix} \quad \bar{U}_q = \begin{matrix} U_{q1} \\ \bar{U}_{q2} \end{matrix} \tag{B}$$

Die neuen Teilmatrizen und Vektoren sind:

$$\bar{I}_2 = \begin{matrix} I_2 \\ I_3 \\ \dots \\ \dots \\ I_z \end{matrix} \quad \bar{U}_{q2} = \begin{matrix} U_{q2} \\ U_{q3} \\ \dots \\ \dots \\ U_{qz} \end{matrix} \quad \bar{M}_{22} = \begin{matrix} M_{22} & M_{23} & \dots & \dots & M_{2z} \\ M_{32} & M_{33} & \dots & \dots & M_{3z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{z2} & M_{z3} & \dots & \dots & M_{zz} \end{matrix} \quad \bar{M}_{21} = \begin{matrix} M_{21} \\ M_{31} \\ \dots \\ \dots \\ M_{z1} \end{matrix}$$

ergibt die Aufspaltung des oberen Gleichungssystem

$$\bar{M}_{12} = \begin{matrix} M_{12} & M_{13} & \dots & \dots & M_{1z} \end{matrix}$$

Einsetzen von (B) in (A) ergibt:

$$\begin{matrix} R_1 & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{matrix} \begin{matrix} I_1 \\ \bar{I}_2 \end{matrix} = \begin{matrix} U_{q1} \\ \bar{U}_{q2} \end{matrix} \tag{C}$$

Die Gleichung (C) lässt sich ausmultiplizieren:

$$R_1 * I_1 + \bar{M}_{12} * \bar{I}_2 = U_{q1} \tag{D}$$

$$\bar{M}_{21} * I_1 + \bar{M}_{22} * \bar{I}_2 = \bar{U}_{q2} \tag{E}$$

Die oberen zwei Gleichungen (D) und (E) bilden ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, dem Strom I<sub>1</sub> und dem Vektor  $\bar{I}_2$ . Durch Einsetzen von  $\bar{I}_2$  soll I<sub>1</sub> bestimmt werden. Die Gleichung (E) wird nach  $\bar{I}_2$  aufgelöst

$$\bar{I}_2 = \bar{M}_{22}^{-1} (\bar{U}_{q2} - \bar{M}_{21} * I_1)$$

und in (D) eingesetzt:

$$R_1 * I_1 + \overline{M}_{12} * \overline{M}_{22}^{-1} (\overline{U}_{q2} - \overline{M}_{21} * I_1) = U_{q1}$$

Ausmultipliziert, geordnet und nach  $I_1$  ausgeklammert ergibt sich:

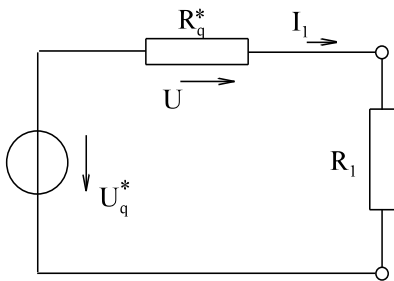
$$\left( R_1 - \overline{M}_{12} * \overline{M}_{22}^{-1} * \overline{M}_{21} \right) I_1 = U_{q1} - \overline{M}_{12} * \overline{M}_{22}^{-1} * \overline{U}_{q2} \quad (F)$$

Mit  $R_q^* = \overline{M}_{12} * \overline{M}_{22}^{-1} * \overline{M}_{21}$  und  $U_q^* = U_{q1} - \overline{M}_{12} * \overline{M}_{22}^{-1} * \overline{U}_{q2}$

lässt sich die Gleichung (F) schreiben als:

$$\left( R_1 + R_q^* \right) I_1 = U_q^*$$

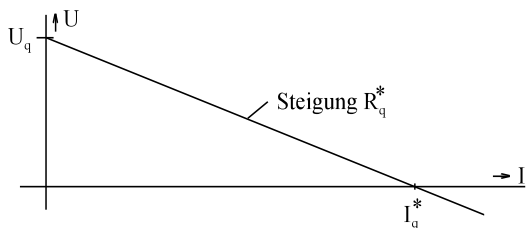
Das ist genau die Gleichung die man erhält, wenn man den Widerstand  $R_1$  im Zweig "1" an eine Spannungsquelle  $U_q^*$  mit Innenwiderstand  $R_q^*$  anschließt, siehe Bild EG361A.



$$I_1 = \frac{U_q^*}{R_q^* + R_1}$$

Bild EG361A

Die Methode der Herleitung über die Matrizen-Rechnung ist zwar möglich, aber sehr aufwendig. Gesucht war eine Methode um einen Zweig möglichst schnell zu berechnen. Die Ableitung über die Matrizen-Rechnung war nur der Beweis, dass bei einem linearen Netzwerk bei Herausnahme eines Zweiges, das Restnetzwerk sich durch Spannungsquelle mit Innenwiderstände darstellen lässt. Eine Spannungsquelle ist durch Leerlaufspannung  $U_q^*$  und Innenwiderstand  $R_q^*$  eindeutig bestimmt. Die Methode der Ersatzquelle beruht darauf, die Daten einer Ersatz-Quelle zu bestimmen.



$$I_q^* = \frac{U_q^*}{R_q^*}$$

Bild EG361B

Nach Bild EG361B ist eine Spannungsquelle gekennzeichnet durch die drei Größen

$U_q^*$  - Leerlaufspannung

$I_q^*$  - Kurzschlussstrom

$R_q^*$  - Innenwiderstand,

wobei die drei Größen über die Formel

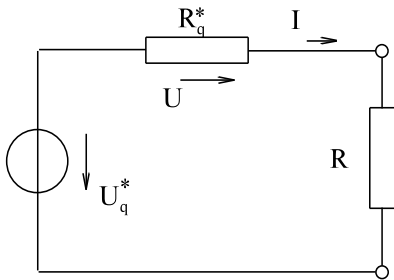
$$U_q^* = R_q^* * I_q^*$$

verknüpft sind. D.h. die Ersatz-Spannungsquelle ist durch zwei der drei oberen Größen eindeutig bestimmt.

### 3.6.2. Physikalische Theorie

#### Netzwerkumwandlung ergibt eine lineare Quelle

Gesucht ist eine Methode um einen Zweig eines Netzwerkes möglichst schnell zu berechnen. Dazu wird der zu berechnende Zweig des Netzwerkes aus dem Restnetzwerk heraus genommen. In Abschnitt 2.3 wurden Netzumwandlungsmethoden beschrieben. Das Restnetzwerk kann (u.a. durch Netzumwandlung) nach Bild EG361A durch eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand beschrieben werden, die durch Leerlaufspannung  $U_q^*$  und Innenwiderstand  $R_q^*$  eindeutig bestimmt ist

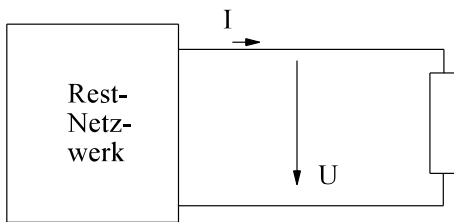


Der Strom im zu untersuchenden Zweig lässt sich nach Ermittlung der Ersatzspannungsquellendaten einfach bestimmen:

$$I = \frac{U_q^*}{R_q^* + R}$$

Bild EG361A

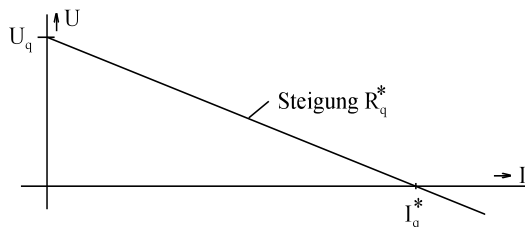
#### Lineares Netz als Black-Box



Das Restnetzwerk nach Bild EG361A wird durch eine Black-Box ersetzt, siehe Bild EG362C. Da die Black-Box ein lineares Netzwerk darstellt, weist es eine lineare Spannungs-Strom-Kennlinie nach Bild EG361B auf.

Bild EG362C

Damit beruht die Methode der Ersatzquelle darauf, die Daten einer Ersatzquelle zu bestimmen.



$$I_q^* = \frac{U_q^*}{R_q^*}$$

Bild EG361B

Nach Bild EG361B ist eine Spannungsquelle gekennzeichnet durch die drei Größen

$U_q^*$  - Leerlaufspannung

$I_q^*$  - Kurzschlussstrom

$R_q^*$  - Innenwiderstand

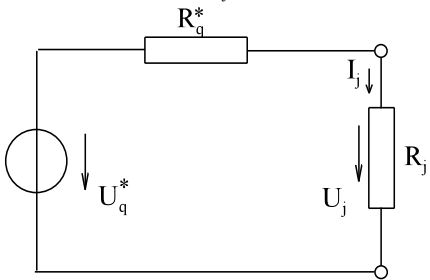
wobei die drei Größen über die Formel

$$U_q^* = R_q^* \cdot I_q^*$$

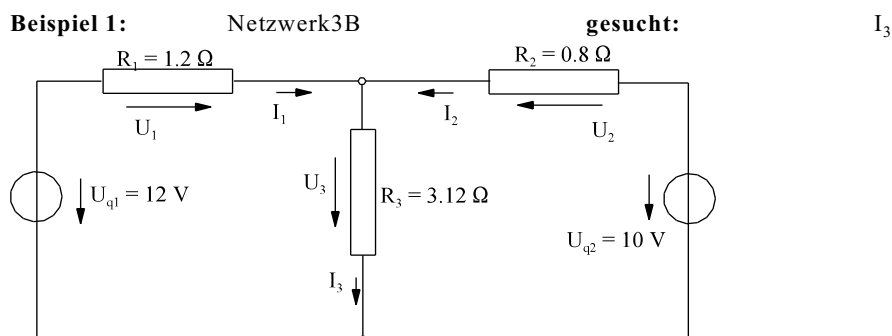
verknüpft sind. D.h. die Ersatz-Spannungsquelle ist durch zwei der drei oberen Größen eindeutig bestimmt.



### 3.6.3. Schema zu Ersatz-Spannungsquelle

Schema zu Ersatz-Spannungsquelle	
A]	Widerstand $R_j$ des zu bestimmenden Zweiges j herausnehmen.
B]	<p>Für das verbleibendes Netzwerk werden zwei der folgenden drei Größen bestimmt (immer die beiden einfachsten auswählen):</p> <p><math>U_q^*</math> - Leerlaufspannungen an den Klemmen des herausgenommenen Zweiges</p> <p><math>I_q^*</math> - Kurzschlussstrom an den Klemmen des herausgenommenen Zweiges</p> <p><math>R_q^*</math> - Innenwiderstand, den man sieht an den Klemmen. Dazu alle idealen Spannungsquellen kurzschließen und alle idealen Stromquellen öffnen.</p> <p>- dritte Größe berechnen <math>U_q^* = R_q^* \cdot I_q^*</math></p> <p>- Hinweis: Evtl. ist zur Bestimmung je ein ESB erforderlich.</p>
C]	<p>ESB: oder Formel für <math>I_j</math></p>  $I_j = \frac{U_q^*}{R_q^* + R_j}$

### 3.6.4. Beispiele und Aufgaben



**Frage:** Welche zwei der drei Größen sind hier am schnellsten zu berechnen? Antwort: Kurzschlussstrom und Innenwiderstand.

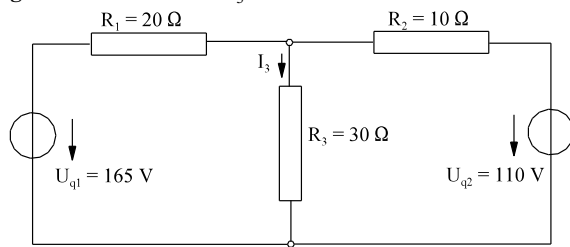
Kurzschluss über  $R_3$  ergibt:

$$I_q^* = \frac{12 \text{ V}}{1.2 \Omega} + \frac{10 \text{ V}}{0.8 \Omega} = 10 \text{ A} + 12.5 \text{ A} = 22.5 \text{ A}$$

$$R_q^* = 1.2 \parallel 0.8 \Omega = \frac{1.2 \Omega \cdot 0.8 \Omega}{1.2 \Omega + 0.8 \Omega} = 0.48 \Omega$$

$$U_q^* = R_q^* \cdot I_q^* = 0.48 \Omega \cdot 22.5 \text{ A} = 10.8 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{U_q^*}{R_q^* + R_3} = \frac{10.8 \text{ V}}{0.48 \Omega + 3.12 \Omega} = 3 \text{ A}$$

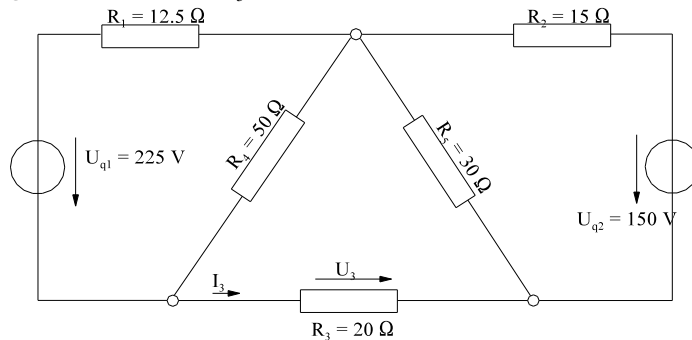
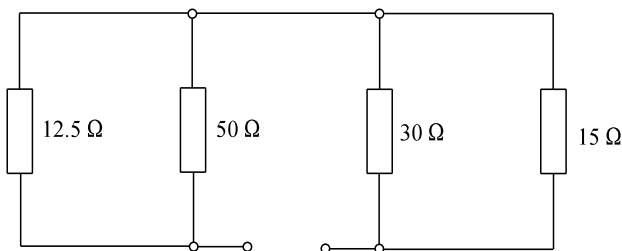
**Beispiel 2:** (Netzwerk 3E)**gesucht:**  $I_3$ 

$$I_q^* = \frac{165 \text{ V}}{20 \Omega} + \frac{110 \text{ V}}{10 \Omega} = 19.25 \text{ A}$$

$$R_q^* = \frac{20 \Omega * 10 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega} = 6.667 \Omega$$

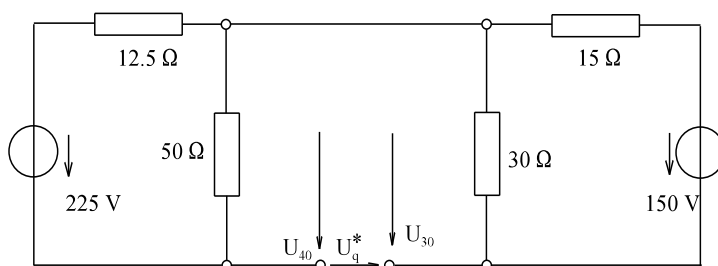
$$U_q^* = R_q^* * I_q^* = 6.667 \Omega * 19.25 \text{ A} = 128.3 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{U_q^*}{R_q^* + R_3} = \frac{128.3 \text{ V}}{6.667 \Omega + 30 \Omega} = 3.5 \text{ A}$$

**Beispiel 3:** (Netzwerk 3A)**gesucht:**  $I_3$ **ESB für  $R_q^*$ :**

$$R_q^* = \frac{12.5 \Omega * 50 \Omega}{12.5 \Omega + 50 \Omega} + \frac{30 \Omega * 15 \Omega}{30 \Omega + 15 \Omega}$$

$$R_q^* = 10 \Omega + 10 \Omega = 20 \Omega$$

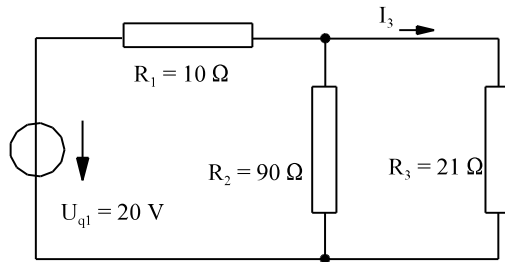
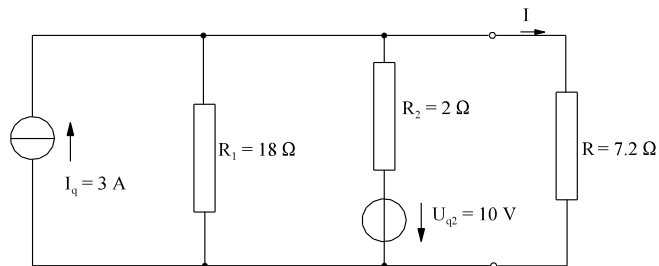
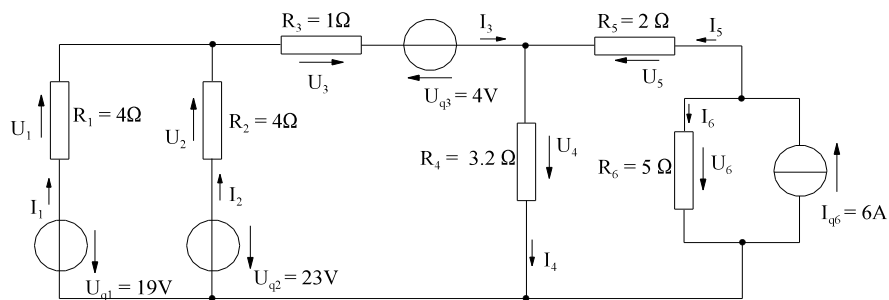
**ESB für  $U_q^*$ :**

$$U_{40} = 225 \text{ V} \frac{50 \Omega}{50 \Omega + 12.5 \Omega} = 180 \text{ V}$$

$$U_{30} = 150 \text{ V} \frac{30 \Omega}{30 \Omega + 15 \Omega} = 100 \text{ V}$$

$$U_q^* = -U_{40} + U_{30} = -180 \text{ V} + 100 \text{ V} = -80 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{U_q^*}{R_q^* + R_3} = \frac{-80 \text{ V}}{20 \Omega + 20 \Omega} = -2 \text{ A}$$

**Aufgabe 3.6.A:**Berechnen Sie den Strom  $I_3$  nach der Methode "Ersatzquelle".**Aufgabe 3.6.B:**Berechnen Sie den Strom  $I$  nach der Methode "Ersatzquelle".**Aufgabe 3.6.C:**Berechnen Sie den Strom  $I_3$  mit Hilfe der Methode "Ersatzquelle".

## 3.7. Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren

### 3.7.1. Einführung von Knotenpunkt-Potenzialen

Was ist ein Potenzial? Jedem Punkt (Knotenpunkt) wird ein Potenzial zugeordnet. Was ist nun die Spannung? Die Spannung zwischen zwei Punkten ist die Differenz der Potenziale zwischen beiden Punkten. Ein Beispiel für Potenzial, Spannungs- und Strom-Berechnung zeigt Bild EG371A.

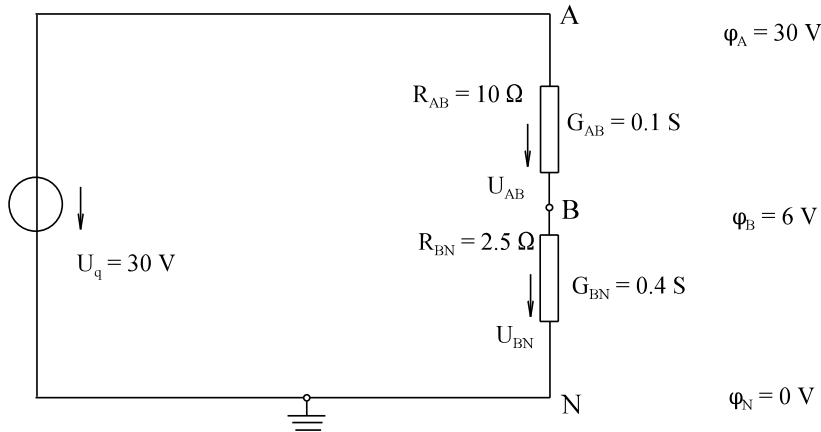


Bild EG371A

Ein Knoten, der Knoten "N" oder "0" bekommt willkürlich das Potenzial  $\varphi_N = 0 \text{ V}$  oder  $\varphi_0 = 0 \text{ V}$

Die Spannungen an den Zweigen ergeben sich durch Differenz der Potenziale:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = 30 \text{ V} - 6 \text{ V} = 24 \text{ V}$$

$$U_{BN} = \varphi_B - \varphi_N = 6 \text{ V} - 0 \text{ V} = 6 \text{ V}$$

$$U_{AN} = \varphi_A - \varphi_N = 30 \text{ V} - 0 \text{ V} = 30 \text{ V}$$

Die Ströme lassen sich mit Hilfe des Produktes aus Leitwert und Potenzialdifferenz berechnen:

$$I_{AB} = G_{AB} \cdot U_{AB} = G_{AB} \cdot (\varphi_A - \varphi_B)$$

$$I_{BN} = G_{BN} \cdot U_{BN} = G_{BN} \cdot (\varphi_B - \varphi_N) = G_{BN} \cdot \varphi_B \quad (\varphi_N = 0)$$

Wenn ein Knoten, der Knoten "N", das Potenzial Null aufweist, braucht das Potenzial nicht berücksichtigt werden.

#### Stromverlauf bei Potenzial:

Außerhalb der Spannungsquelle fließt der Strom von höheren Potenzial zum niedrigen Potenzial. Gibt ein Netzelement (Quelle) Leistung ab, fließt der Strom vom niedrigen Potenzial zum höheren Potenzial.

### 3.7.2. Ableitung des Knotenpunkt- Potenzial-Verfahrens am Beispiel

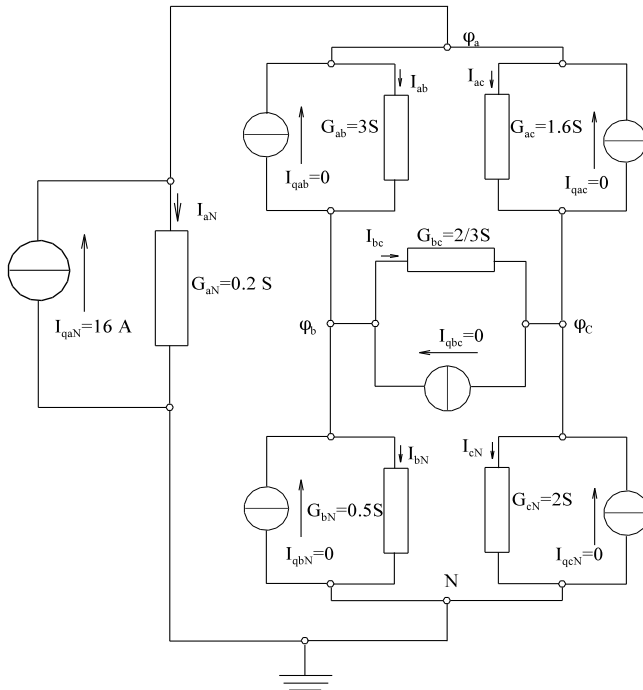


Bild EG372A: Modifiziertes Netzwerk 3J

Nach Kap. 3.7.1 und Bild EG372A ergeben sich die Zweigströme in den Widerständen:

$$I_{aN} = G_{aN} \cdot \varphi_a \tag{1}$$

$$I_{ab} = G_{ab} \cdot (\varphi_a - \varphi_b) \tag{2}$$

$$I_{ac} = G_{ac} \cdot (\varphi_a - \varphi_c) \tag{3}$$

$$I_{bc} = G_{bc} \cdot (\varphi_b - \varphi_c) \tag{4}$$

$$I_{bN} = G_{bN} \cdot \varphi_b \tag{5}$$

$$I_{cN} = G_{cN} \cdot \varphi_c \tag{6}$$

Die Zweigströme (1) bis (6) sind durch die drei noch zu bestimmenden Potenziale  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$  und  $\varphi_c$  eindeutig beschreibbar. Gesucht ist ein Gleichungssystem für die drei Variablen  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$  und  $\varphi_c$ . Das Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren ist das Analogon zum Maschenstrom-Verfahren. Hier wurde das Gleichungssystem für Maschenströme über die Maschenumläufe aufgestellt. Beim Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren wird nun das Gleichungssystem mit Hilfe von Knotensummen aufgestellt.

Für das obere Beispiel ergeben sich die drei Knotensummen (für vier Knoten):

$$\text{Knoten a: } I_{ab} + I_{ac} + I_{aN} = I_{qab} + I_{qac} + I_{qaN} \tag{7}$$

$$\text{Knoten b: } -I_{ab} + I_{bc} + I_{bN} = -I_{qab} + I_{qbc} + I_{qbN} \tag{8}$$

$$\text{Knoten c: } -I_{ac} - I_{bc} + I_{cN} = -I_{qac} - I_{qbc} + I_{qcN} \tag{9}$$

Das Ersetzen der Ströme in (7) bis (9) durch (1) bis (6) ergibt die Knotensumme in Abhängigkeit der drei Potenziale  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$  und  $\varphi_c$  und der Leitwerte:

$$G_{ab} \cdot (\varphi_a - \varphi_b) + G_{ac} \cdot (\varphi_a - \varphi_c) + G_{aN} \cdot \varphi_a = I_{qab} + I_{qac} + I_{qaN} \tag{10}$$

$$-G_{ab} \cdot (\varphi_a - \varphi_b) + G_{bc} \cdot (\varphi_b - \varphi_c) + G_{bN} \cdot \varphi_b = -I_{qab} + I_{qbc} + I_{qbN} \tag{11}$$

$$-G_{ac} \cdot (\varphi_a - \varphi_c) - G_{bc} \cdot (\varphi_b - \varphi_c) + G_{cN} \cdot \varphi_c = -I_{qac} - I_{qbc} + I_{qcN} \tag{12}$$

Damit sind die drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Variablen  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$  und  $\varphi_c$  gefunden. Das Gleichungssystem (10) bis (12) wird ausmultipliziert und in eine Matrizen-Schreibweise umgeformt:

	$\varphi_a$	$\varphi_b$	$\varphi_c$	
a	$G_{ab} + G_{ac} + G_{aN}$	$-G_{ab}$	$-G_{ac}$	*
b	$-G_{ab}$	$G_{ab} + G_{bc} + G_{bN}$	$-G_{bc}$	
c	$-G_{ac}$	$-G_{bc}$	$G_{ac} + G_{bc} + G_{cN}$	

$\varphi_a$	$I_{qab} + I_{qac} + I_{qaN}$
$\varphi_b$	$-I_{qab} + I_{qbc} + I_{qbN}$
$\varphi_c$	$-I_{qac} - I_{qbc} + I_{qcN}$

$$\tag{13}$$

Aus dem Gleichungssystem (13) sind die Regeln für das Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren zu erkennen:

- In der Hauptdiagonale werden die an einem Knoten angeschlossenen Leitwerte positiv addiert.
- In den Nebenelementen werden die Leitwerte zwischen zwei Knoten als Koppelung negativ eintragen.
- In dem Anregungsvektor (Stromquellenvektor) ist die Summe der in einem Knoten rein fließenden Ströme von Stromquellen enthalten. Rausfließende Ströme müssen negativ addiert werden.

#### Zahlen-Beispiel für Netzwerk 3J:

	$\varphi_a$	$\varphi_b$	$\varphi_c$	
a	$3S + 1.6S + 0.2S$	$-3S$	$-1.6S$	*
b	$-3S$	$3S + 0.666S + 0.5S$	$-0.666S$	
c	$-1.6S$	$-0.666S$	$1.6S + 0.666S + 2S$	

$\varphi_a$	$16A$
$\varphi_b$	$0$
$\varphi_c$	$0$

$$\tag{13}$$

Normiert auf  $G_{\text{Norm}} = 1\text{ S}$ ,  $\varphi_{\text{Norm}} = U_{\text{Norm}} = 1\text{ V}$  und  $I_{\text{Norm}} = 1\text{ A}$  lässt sich oberes Gleichungssystem angeben:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4.8 & -3 & -1.6 \\ \hline -3 & 4.1667 & -0.6667 \\ \hline -1.6 & -0.6667 & 4.267 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \varphi_a^N \\ \hline \varphi_b^N \\ \hline \varphi_c^N \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 16 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Die numerische Lösung des oberen Gleichungssystem ergibt:

$$\varphi_a^N = 10 \qquad \varphi_b^N = 8 \qquad \varphi_c^N = 5$$

Die Entnormierung wird vorgenommen:

$$\varphi_a = 10\text{ V} \qquad \varphi_b = 8\text{ V} \qquad \varphi_c = 5\text{ V}$$

Die Spannungen lassen sich mit Hilfe der Potenziale berechnen:

$$\begin{aligned} U_{aN} &= \varphi_a = 10\text{ V} \\ U_{bN} &= \varphi_b = 8\text{ V} \\ U_{cN} &= \varphi_c = 5\text{ V} \\ U_{ab} &= \varphi_a - \varphi_b = 10\text{ V} - 8\text{ V} = 2\text{ V} \\ U_{ac} &= \varphi_a - \varphi_c = 10\text{ V} - 5\text{ V} = 5\text{ V} \\ U_{bc} &= \varphi_b - \varphi_c = 8\text{ V} - 5\text{ V} = 3\text{ V} \end{aligned}$$

Die Zweigströme können noch mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes bestimmt werden.

### 3.7.3. Schema zum manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren

<b>Schema zum manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren</b>	
<b>gegeben:</b> Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen	
A]	Einem Knoten, dem Knoten "0" wird das Potenzial $\varphi_0 = 0\text{ V}$ zugeordnet.
B]	Die anderen k - 1 Knoten bekommen das Potenzial $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{k-1}$
C]	Sämtliche Spannungsquellen im Stromquellen umwandeln.
D]	Widerstände in Leitwerte angeben.
E]	Gleichungssystem für die Potenziale $\varphi_1, \varphi_2 \dots, \varphi_{k-1}$ aufstellen: $\overline{G}' * \overline{\varphi} = \overline{I}'_q$
F]	<b>Matrixhauptdiagonale:</b> Alle von Knoten abgehenden Leitwerte positiv aufsummieren. <b>Matrixnebenelemente:</b> $G_{ij}$ , den Leitwert der Verbindung zwischen Knoten i und Knoten j negativ eintragen. <b>Anregungsvektor:</b> Die Ströme der Stromquellen an dem jeweiligen Knoten aufsummieren (reinfließend ist positiv und rausfließend ist negativ).
G]	Normieren
H]	Gleichungssystem lösen
I]	Entnormieren
J]	Spannungen aus Potenzial-Differenzen berechnen
K]	Ströme berechnen
L]	Evtl. Stromquellen zurückwandeln
M]	Probe

**Beispiel 1:** (Netzwerk 3K)

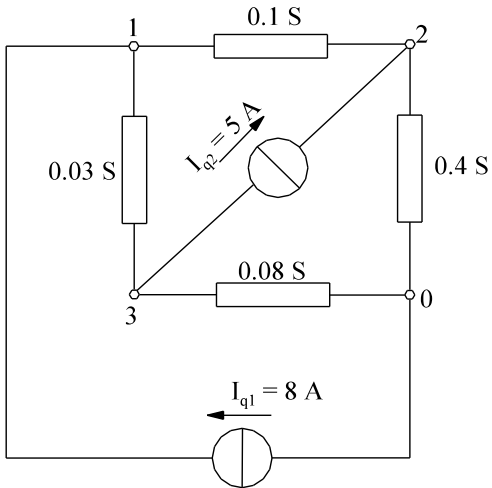


Bild EGNET3K

	1	2	3
1	$0.1\text{ S} + 0.03\text{ S}$	$-0.1\text{ S}$	$-0.03\text{ S}$
2	$-0.1\text{ S}$	$0.1\text{ S} + 0.4\text{ S}$	$0$
3	$-0.03\text{ S}$	$0$	$0.08\text{ S} + 0.03\text{ S}$

$\varphi_1$	=	8 A
$\varphi_2$	=	5 A
$\varphi_3$	=	-5 A

$G_{\text{norm}} = 1\text{ S}$ ,  $\varphi_{\text{Norm}} = U_{\text{Norm}} = 1\text{ V}$  und  $I_{\text{Norm}} = 1\text{ A}$

0.13	-0.1	-0.03
-0.1	0.5	0
-0.03	0	0.11

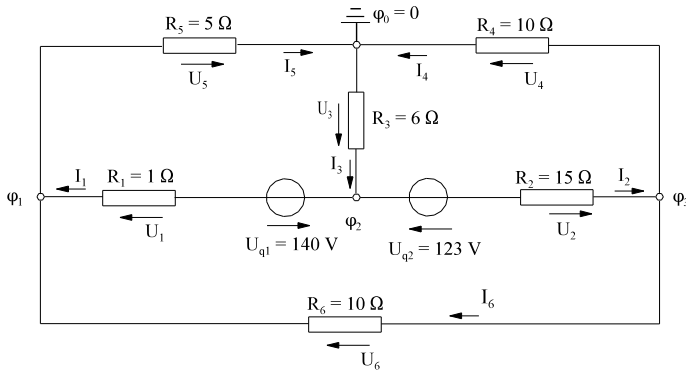
$\varphi_1^N$	=	8
$\varphi_2^N$	=	5
$\varphi_3^N$	=	-5

**Ergebnis:**  $\varphi_1^N = 75$        $\varphi_2^N = 25$        $\varphi_3^N = -25$

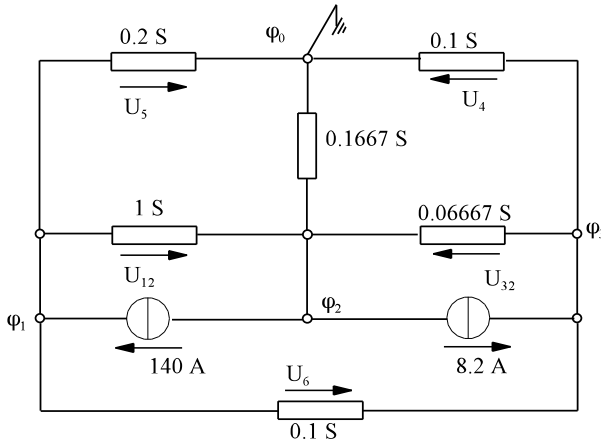
**Entnormierung:**  $\varphi_1 = 75\text{ V}$        $\varphi_2 = 25\text{ V}$        $\varphi_3 = -25\text{ V}$

$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = 75\text{ V} - (-25)\text{ V} = 100\text{ V}$   
 $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 75\text{ V} - 25\text{ V} = 50\text{ V}$   
 $U_{20} = \varphi_2 - 0 = 25\text{ V}$   
 $U_{30} = \varphi_3 - 0 = -25\text{ V}$

**Beispiel 2: (Netzwerk 3N)**



Im linken Netzwerk werden die Knoten bezeichnet. Spannungen der Zweige sind schon bezeichnet.



Die zwei Spannungsquellen des Netzwerkes 3N sind gewandelt worden und die Hilfsspannungen  $U_{12}$  und  $U_{32}$  eingeführt.

Bild EG373A

Mit Hilfe von Bild EG373A wird das normierte Gleichungssystem direkt aufgestellt. Die Zahlenwerte der Summe der Leitwerte wird in die Hauptdiagonalen eingetragen. Für die Knoten erfolgt die Summation der Quellströme:

	1	2	3
1	1.3	-1	-0.1
2	-1	1.233	-0.06667
3	-0.1	-0.06667	0.2667

$$* \begin{matrix} \varphi_1^N \\ \varphi_2^N \\ \varphi_3^N \end{matrix} = \begin{matrix} 140 \\ -148.2 \\ 8.2 \end{matrix}$$

Nach Entnormierung und numerischer Lösung des oberen Gleichungssystems ergibt sich:

$\varphi_1$	=	50 V
$\varphi_2$	=	-78 V
$\varphi_3$	=	30 V

$U_5 = \varphi_1 = 50 \text{ V}$	$U_6 = \varphi_3 - \varphi_1 = -20 \text{ V}$
$U_4 = \varphi_3 = 30 \text{ V}$	$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 128 \text{ V}$
$U_3 = -\varphi_2 = 78 \text{ V}$	$U_{32} = \varphi_3 - \varphi_2 = 108 \text{ V}$

Zurückwandeln der Quellen:

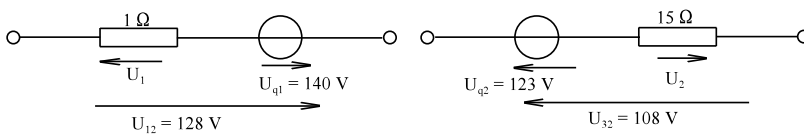


Bild EG373B

$$U_1 = U_{q1} - U_{12} = 140 \text{ V} - 128 \text{ V} = 12 \text{ V}$$

$$U_2 = U_{q2} - U_{32} = 123 \text{ V} - 108 \text{ V} = 15 \text{ V}$$



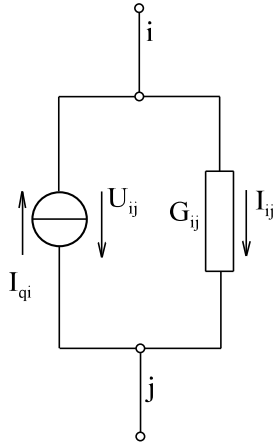
### 3.7.4. Knotenpunkt-Potenzial-Verfahrens für Rechner

#### 3.7.4.1. Mathematische Herleitung

Beim manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren mussten Matrix und Vektoren aus der Struktur des Netzes bestimmt werden. Anschließend erfolgte die Lösung des Gleichungssystems. Wenn nun aber die Lösung schon in einem Rechner erfolgt, kann das Verfahren weiter schematisiert werden. Damit sinkt auch die Fehlerwahrscheinlichkeit Netzwerken.

Für ein Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen sollen die folgenden drei Gesetze in Matrixschreibweise angegeben werden:

- ohmsches Gesetz
- 1. Kirchhoffsches Gesetz (Stromsumme)
- 2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenumlauf)



$$U_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$$

$$I_{ij} = G_{ij}(\varphi_i - \varphi_j)$$

#### Vereinbarung der Zweigrichtung

Beim Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren sind nur Netzwerke mit Stromquellen auszuwerten. Spannungsquellen müssen in Stromquellen gewandelt werden. Damit die obere Aussage (Summe der in den Knoten reinfließenden Ströme ist gleich der rausfließenden Quellströme) die gleiche  $\bar{K}$ -Matrix auf beiden Seiten der Gleichung ergibt, muss die Richtung der Quellströme in einem Zweig entgegengesetzt der Richtung am Leitwert sein.

Bild EG374A

#### Auswertung Ohmsches Gesetz:

Die Gleichungen für z-Zweige

$$I_1 = G_1 * U_1$$

$$I_2 = G_2 * U_2$$

$$\dots \dots$$

$$I_z = G_z * U_z$$

werden zur folgenden Vektorgleichung zusammengefasst:

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{U} \tag{1}$$

Die Elemente der oberen Gleichung bedeuten:

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ \dots \\ I_z \end{bmatrix} \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} G_1 & & & & \\ & G_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & G_z \end{bmatrix} \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ \dots \\ U_z \end{bmatrix}$$

$\bar{I}$  - Vektor der Ströme in den Zweigen  $Dim(\bar{I}) = (z, 1)$

$\bar{U}$  - Vektor der Spannung in den Zweigen  $Dim(\bar{U}) = (z, 1)$

$\bar{G}$  - Leitwertmatrix  $Dim(\bar{G}) = (z, z)$

**Auswertung 1. Kirchhoffsches Gesetz:**

$$\sum I_i = \sum I_{qi} \quad \text{für Knoten } i = 1 \dots k-1$$

Die Summe der reinfließenden Ströme der Stromquellen ist gleich der Summe der abfließenden Ströme in den Leitwerten. Diese Aussage kann auch in der Form Matrix mal Vektor angegeben werden:

	1	2	z				1	2	z	
1						=	1			
							2			
k-1							k-1			

Als Abkürzung kann man angeben:

$$\bar{K} * \bar{I} = \bar{K} * \bar{I}_q \tag{2}$$

In der oberen Gleichung bedeuten:

	1	2	z				1	2	z
$\bar{I}$	I <sub>1</sub>					=	1	I <sub>q1</sub>	
	I <sub>2</sub>						2	I <sub>q2</sub>	
	...							...	
	...							...	
	I <sub>z</sub>						k-1	I <sub>qz</sub>	

- $\bar{I}$  - Vektor der Ströme in den Zweigen Dim( $\bar{I}$ ) = (z, 1)
- $\bar{I}_q$  - Vektor der Quellströme in den Zweigen Dim( $\bar{I}_q$ ) = (z, 1)
- $\bar{K}$  - Knoten-Zweig-Inzidenz-Matrix Dim( $\bar{K}$ ) = (k-1, z)

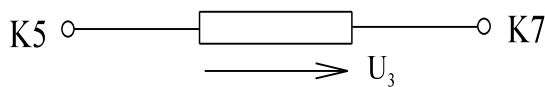
Der Inhalt der Knotenzweig-Inzidenz-Matrix  $\bar{K}$  enthält die Informationen, wie der Zweig mit dem Knoten verbunden ist. Am Kreuzungspunkt Zweig-Masche wird eingetragen:

- "0" wenn Knoten nicht mit Zweig verbunden ist
- "1" wenn Pfeil des Leitwert-Zweiges vom Knoten weg zeigt (wenn Pfeil der Quelle in den Knoten zeigt)
- "-1" wenn Pfeil des Leitwert-Zweiges zum Knoten hinzeigt (wenn Pfeil der Quelle vom Knoten weg zeigt)

**Auswertung 2. Kirchhoffsches Gesetz:**

Die Spannung an einem Zweig ergibt sich mit Hilfe der Potenziale. Liegt der Zweig "3" als Beispiel zwischen den Knoten 5 und 7 ergibt sich die Spannung U<sub>3</sub>

$$U_3 = \varphi_5 - \varphi_7$$



aus der Differenz der Potenziale der Knotenpunkte. Dieses kann für alle Zweige wieder in Matrix-Form geschrieben werden:

	1	2	k-1				1	2	k-1
U <sub>1</sub>						=	1	φ <sub>1</sub>	
U <sub>2</sub>							2	φ <sub>2</sub>	
...								...	
...								...	
U <sub>z</sub>							z	φ <sub>k-1</sub>	

Die obere Matrix gibt wieder den Zusammenhang zwischen Zweigen und Knoten an. In jeder Zeile müssen eine "1" oder/und eine "-1" stehen. Eine "+1" wenn der Pfeil des Stromes im Leitwertzweig vom Knoten weg zeigt und eine "-1" wenn der Pfeil zum Knoten hin zeigt. Die obere Matrix ist fast die Knoten-Zweig-Inzidenz-Matrix, nur transponiert. Damit kann die obere Gleichung geschrieben werden als:

$$\bar{U} = \bar{K}^T * \bar{\varphi} \tag{3}$$

Bevor die Gleichungen (1) bis (3) ausgewertet werden, soll eine etwas andere Herleitung von (1) bis (3) erfolgen.

### 3.7.4.2. Physikalische Herleitung am Beispiel

Die Herleitung aus Abschnitt 3.7.4.1 ist anhand eines Beispielnetzwerkes leichter verständlich. Die allgemeine Herleitung wird hier konkretisiert

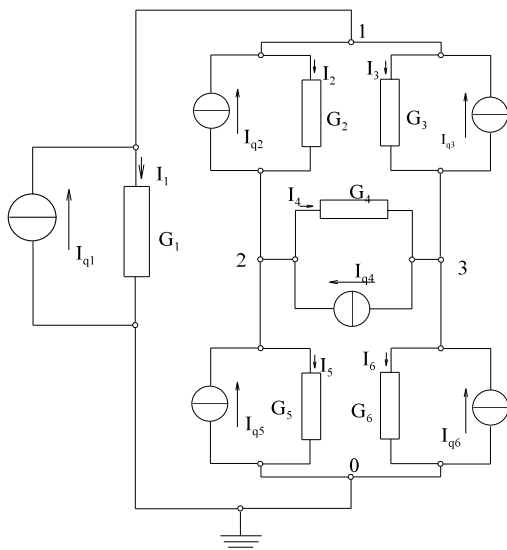


Bild EG7141: Modifiziertes Netzwerk 3J

#### Auswertung Ohmsches Gesetz:

Die Gleichungen für z=6 Zweige nach Bild EG7141

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1 * U_1 \\ I_2 &= G_2 * U_2 \\ I_3 &= G_3 * U_3 \\ I_4 &= G_4 * U_4 \\ I_5 &= G_5 * U_5 \\ I_6 &= G_6 * U_6 \end{aligned}$$

werden zur folgenden Vektorgleichung zusammengefasst:

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{U} \tag{1}$$

Die Elemente der oberen Gleichung (1) bedeuten:

$$\bar{I} = \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{matrix} \quad \bar{G} = \begin{matrix} G_1 & & & & & \\ & G_2 & & & & \\ & & G_3 & & & \\ & & & G_4 & & \\ & & & & G_5 & \\ & & & & & G_6 \end{matrix} \quad \bar{U} = \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{matrix}$$

- $\bar{I}$  - Vektor der Ströme in den Zweigen  $\text{Dim}(\bar{I}) = (z = 6, 1)$
- $\bar{U}$  - Vektor der Spannung in den Zweigen  $\text{Dim}(\bar{G}) = (z = 6, 1)$
- $\bar{G}$  - Leitwertmatrix, Diagonalmatrix  $\text{Dim}(\bar{U}) = (z = 6, z = 6)$

**Auswertung 1. Kirchhoffsches Gesetz:**

Die Summe der reinfließenden Ströme der Stromquellen ist gleich der Summe der abfließenden Ströme in den Leitwerten der drei Knoten 1 bis 3 (k-1 Knoten) nach Bild EG7141:

K1:  $I_1 + I_2 + I_3 = I_{q1} + I_{q2} + I_{q3}$   
 K2:  $-I_2 + I_4 + I_5 = -I_{q2} + I_{q4} + I_{q5}$   
 K3:  $-I_3 - I_4 + I_6 = -I_{q3} - I_{q4} - I_{q6}$

Diese Aussage kann auch in der Form Matrix mal Vektor angegeben werden:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & z=6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ k-1=3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ & -1 & & 1 & 1 & \\ & & -1 & -1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & z=6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ k-1=3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ & -1 & & 1 & 1 & \\ & & -1 & -1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \\ I_{q3} \\ I_{q4} \\ I_{q5} \\ I_{q6} \end{bmatrix}$$

Als Abkürzung kann man angeben

$$\bar{K} * \bar{I} = \bar{K} * \bar{I}_q \tag{2}$$

mit

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ & -1 & & 1 & 1 & \\ & & -1 & -1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{I}_q$  - Vektor der Quellströme in den Zweigen

$$\text{Dim}(\bar{I}_q) = (z = 6, 1)$$

$\bar{K}$  - Knoten-Zweig-Inzidenz-Matrix

$$\text{Dim}(\bar{K}) = (k - 1 = 3, z = 6)$$

Der Inhalt der Knoten-Zweig-Inzidenz-Matrix  $\bar{K}$  enthält die Informationen, wie der Zweig mit dem Knoten verbunden ist. Am Kreuzungspunkt Zweig-Masche wird eingetragen:

- "0" wenn Knoten nicht mit Zweig verbunden ist
- "1" wenn Pfeil des Leitwert-Zweiges vom Knoten weg zeigt
- "-1" wenn Pfeil des Leitwert-Zweiges zum Knoten hinzeigt

**Auswertung 2. Kirchhoffsches Gesetz:**

Die Spannung an den Zweigen ergeben sich aus der Differenz der Potenziale der Knotenpunkte. Dieses kann nach Bild EG7141 in Matrix-Form geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_1 - \varphi_3 \\ \varphi_2 - \varphi_3 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & -1 & \\ 1 & & -1 \\ & 1 & -1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} * \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

und mit

$$\bar{K}^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & -1 & \\ 1 & & -1 \\ & 1 & -1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

als Matrixgleichung angegeben werden (Matrix K schon bekannt):

$$\bar{U} = \bar{K}^T * \bar{\varphi} \tag{3}$$

## 3.7.4.3. Auswertung der Formeln

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{U} \quad (1)$$

$$\bar{K} * \bar{I} = \bar{K} * \bar{I}_q \quad (2)$$

$$\bar{U} = \bar{K}^T * \bar{\varphi} \quad (3)$$

Gleichung (3) in (1) eingesetzt ergibt:

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{K}^T * \bar{\varphi} \quad (4)$$

Gleichung (4) wird in (2) eingesetzt:

$$\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T * \bar{\varphi} = \bar{K} * \bar{I}_q \quad (5)$$

Die obere Gleichung ist mit

$$\bar{G}' = \bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T$$

und

$$\bar{I}'_q = \bar{K} * \bar{I}_q$$

das Gleichungssystem des manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahrens:

$$\bar{G}' * \bar{\varphi} = \bar{I}'_q$$

Invertieren und Multiplizieren von links der Matrix  $\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T$  aus Gleichung (5) ergibt

$$\bar{\varphi} = \left[ \bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T \right]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q \quad (6)$$

Mit Hilfe von (3) und (6) lassen sich die Zweig-Spannungen angeben:

$$\bar{U} = \bar{K}^T \left[ \bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T \right]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q \quad (7)$$

Aus (1) und (7) lassen sich auch die Zweigströme bestimmen:

$$\bar{I} = \bar{G} * \bar{K}^T \left[ \bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T \right]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q \quad (8)$$

Die Aufgabe besteht bei diesem Verfahren darin, die Matrizen  $\bar{K}$  und  $\bar{G}$  sowie den Vektor  $\bar{I}_q$  in den Rechner einzugeben. Alle anderen Berechnung wie

- transponieren
- Matrizen multiplizieren
- Matrizen invertieren
- Vektor multiplizieren
- Ausgabe

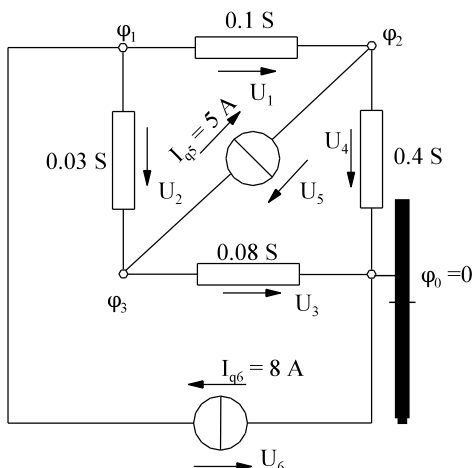
sollten getestete Unterprogramme des Rechners übernehmen. Besteht diese Möglichkeit nicht, ist ein manuelles Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren angebracht.

## 3.7.5. Schema zum Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren für Rechner

Schema zum Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren für Rechner	
gegeben: Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen	
A]	Ein Knoten wird mit "0" gekennzeichnet.
B]	Die anderen Knoten bekommen die Indizes 1, 2, 3 ..... k-1
C]	Sämtliche Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln.
D]	Widerstände in Leitwerte angeben.
E]	Jedem Zweig eine Richtung zuordnen. Dabei muss bei Zweigen mit Stromquellen die Richtung der Quelle entgegengesetzt zur Richtung des Widerstandes sein.
F]	<p>Matrix <math>\bar{K}^T</math> der Dimension (z, k-1) auffüllen. Am Kreuzungspunkt Zweig-Masche steht eine "1", wenn der Zweigstrom (Richtung des Stromes im Widerstand) aus dem Knoten herausfließt und eine "-1" wenn der Zweigstrom in den Knoten hineinfließt. Der Rest der Matrix ist Null.</p> <hr/> <p>Zweite Möglichkeit (praktische Möglichkeit) <math>\bar{K}^T</math> zu bestimmen:</p> $\bar{U} = \bar{K}^T * \bar{\varphi}$ <p>Die Zweigspannung mit Hilfe der Potenziale bestimmen. Die Verknüpfungsmatrix ist <math>\bar{K}^T</math>.</p>
G]	Vektor $\bar{I}_q$ auffüllen mit den Werten der Stromquellen in den Zweigen.
H]	Leitwerte der Zweige in der Diagonalen der Matrix $\bar{G}$ eintragen.
I]	$\bar{G}$ , $\bar{K}^T$ und $\bar{I}_q$ normieren und in den Rechner eingeben.
J]	<p>Rechner berechnet die Zweigwerte nach folgenden Formeln:</p> $\bar{\varphi} = [\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q \quad (6)$ $\bar{U} = \bar{K}^T [\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q \quad (7)$ $\bar{I} = \bar{G} * \bar{K}^T [\bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q \quad (8)$
K]	Evtl. Stromquellen zurückwandeln
L]	Probe

**Beispiel:**

Im Netzwerk 3K sollen sämtliche Zweigspannungen und Zweigströme mit Hilfe des Knotenpunkt-Potenzial-Verfahrens für Rechner bestimmt werden.



Im Bild der Aufgabenstellung werden:

- Potentiale der Knoten bezeichnet
- Zweigrichtung einzeichnet (siehe Skizze) mit Bezeichnung der Spannungen.
- Die Nummerierung der Stromquelle von "1" und "2" in "5" und "6" geändert.

Zur Berechnung sind folgende Matrizen und Vektoren als Eingabe der Rechneroperationen zu bestimmen:

- Matrix  $\bar{K}^T$
- Leitwertmatrix  $\bar{G}$
- Quellvektor  $\bar{I}_q$

Spätestens bei der Eingabe des Quellstromvektors stellt man fest, dass vier Zweige nicht ausreichen, weil sonst die Quellströme "5" und "6" nicht berücksichtigt werden. Die Zweige "5" und "6" stellen nun Zweige dar, mit Quellen deren Parallelleitwert Null beträgt. Beim Verfahren "Maschen- und Knotenanalyse" finden diese Zweige ("5" und "6") keine Berücksichtigung, weil keine zu bestimmenden Ströme (Variable des Gleichungssystems) vorhanden sind.

$$\begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{matrix} = \begin{matrix} \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_1 - \varphi_3 \\ \varphi_3 \\ \varphi_2 \\ \varphi_2 - \varphi_3 \\ \varphi_1 \end{matrix} = \begin{matrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 1 & -1 & \\ 1 & & -1 \\ & & 1 \\ & 1 & \\ & 1 & -1 \\ 1 & & \end{matrix} * \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \\ \varphi_3 \end{matrix}$$

$$\bar{K}^T = \begin{matrix} 1 & -1 & \\ & & -1 \\ & & 1 \\ & 1 & \\ & 1 & -1 \\ 1 & & \end{matrix} \quad \bar{G}^N = \begin{matrix} 0.1 & & & & & \\ & 0.03 & & & & \\ & & 0.08 & & & \\ & & & 0.4 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{matrix} \quad \bar{I}_q^N = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \end{matrix}$$

Die unten angegebenen Werte werden mit Hilfe der zwei folgenden Vektor und Matrixoperationen berechnet:

$$\bar{U} = \bar{K}^T \left[ \bar{K} * \bar{G} * \bar{K}^T \right]^{-1} \bar{K} * \bar{I}_q \quad \bar{I} = \bar{G} * \bar{U}$$

$$\bar{U}^N = \begin{matrix} U_1^N \\ U_2^N \\ U_3^N \\ U_4^N \\ U_5^N \\ U_6^N \end{matrix} = \begin{matrix} 50 \\ 100 \\ -25 \\ 25 \\ 50 \\ 75 \end{matrix} \quad \bar{I}^N = \begin{matrix} I_1^N \\ I_2^N \\ I_3^N \\ I_4^N \\ I_5^N \\ i_6^N \end{matrix} = \begin{matrix} 5 \\ 3 \\ -2 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

## 3.7.6. Fragen und Aufgaben

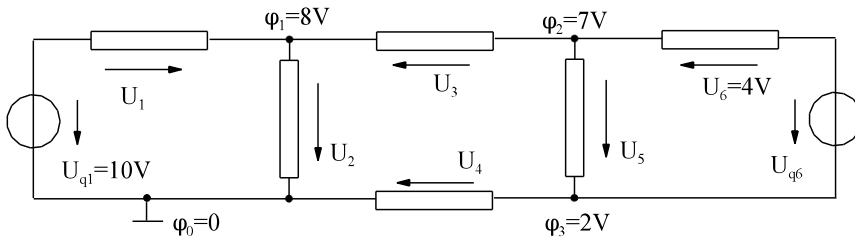
Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.3.7.A</b>	Das elektrische Potenzial ist definiert als: * die Summe von Spannungen * der Strom nach Masse * die Spannung gegenüber einem Bezugspunkt	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.7.B</b>	Die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten ergibt sich aus: * der Differenz der zugehörigen Potenziale * der Summe der zugehörigen Potenziale * dem Produkt der zugehörigen Potenziale	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.7.C</b>	In einem passiven Widerstand fließt der Strom vom: * höheren zum niedrigeren Potenzial * niedrigeren zum höheren Potenzial	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.7.D</b>	In einer Quelle fließt der Strom im Normalfall vom: * höheren zum niedrigeren Potenzial * niedrigeren zum höheren Potenzial	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.7.E</b>	Das Bezugspotenzial <b>muss</b> die Masse sein Das Bezugspotenzial ist in der Regel die Masse Das Bezugspotenzial kann auch ein anderer Punkt als Masse sein	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.7.F</b>	Das Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren basiert auf: * der Einführung von Knotenpunkt-Potenzialen * der Einführung von Maschenströmen * der Einführung von Kreisspannungen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.7.G</b>	Das Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren dient: * zur Berechnung von linearen Netzen * zur Berechnung von nichtlinearen Netzen * zur Berechnung von Netzen mit <b>nur</b> einer Spannungsquelle	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.7.H</b>	Beim Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren müssen * Spannungsquellen in Stromquellen umgerechnet werden * Stromquellen in Spannungsquellen umgerechnet werden * keine Quellen umgerechnet werden	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.7.I</b>	Die Anzahl der notwendigen Potenziale $n$ beim Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren beträgt: * $n = z - (k - 1)$ * $n = k$ * $n = z$ * $n = k - 1$ * $n = k + 1$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.3.7.J</b>	Beim manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren sind in der Hauptdiagonalen einzutragen: * die Summe der Widerstände einer Masche * die Summe der Leitwerte einer Masche * die Summe der Leitwerte eines Knotens * die Summe der Widerstände eines Knotens * die Leitwerte zweier Maschen * die Widerstände zweier Maschen * die Spannungsquellen im entsprechenden Knoten	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>



Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.3.7.K</b>	Beim manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren sind in den Nebenelementen einzutragen:		
	* an der Stelle 2-3 der Widerstand von Knoten 2 und Knoten 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* an der Stelle 2-3 der Leitwert von Knoten 2 und Knoten 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* an der Stelle 2-3 der Widerstand der von Masche 2 und Masche 3 gemeinsam durchlaufen wird	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* an der Stelle 2-3 der Leitwert der von Masche 2 und Masche 3 gemeinsam durchlaufen wird	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* der Widerstand stets positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* der Widerstand stets negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* der Leitwert stets positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* der Leitwert stets negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* positiv, wenn Maschenrichtung gleich Zweigrichtung ist	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* positiv, wenn Maschenrichtung 1 gleich Maschenrichtung 2 ist	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* negativ, wenn Maschenrichtung 1 gleich Maschenrichtung 2 ist	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* positiv, wenn Maschenrichtung 1 ungleich Maschenrichtung 2 ist	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* negativ, wenn Maschenrichtung 1 ungleich Maschenrichtung 2 ist	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* der Wert unabhängig von der Zweigrichtung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* der Wert abhängig von der Zweigrichtung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.3.7.L</b>	Beim manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren sind einzutragen im Quellvektor an der Stelle 3		
	* Spannungen der Quellen im Zweig 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Ströme der Quellen im Zweig 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* alle Ströme der Quellen des Knotens 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* alle Spannungen der Quellen des Knotens 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* alle Werte positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* alle Werte negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* positiv, wenn der Strom der Quelle in den Knoten rein fließt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* negativ, wenn der Strom der Quelle aus den Knoten raus fließt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* positiv, wenn Richtung von Quelle und Zweig gleich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
* negativ, wenn Richtung von Quelle und Zweig unterschiedlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
<b>AF.3.7.M</b>	Beim Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren für Rechner		
	* sind Matrizenoperationen auszuführen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* sind nur skalare Operationen auszuführen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* sind Zweige mit nur Widerständen erlaubt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* sind Zweige mit nur Spannungsquellen erlaubt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* sind Zweige mit nur Stromquellen erlaubt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* müssen $z - (k - 1)$ Maschen festgelegt werden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* müssen $k-1$ Knotenpotentiale festgelegt werden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* müssen $k+1$ Knotenpotentiale festgelegt werden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* bekommt ein Knoten das Potenzial Null	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* müssen in jedem Zweig die Richtungen von Stromquelle und Spannung am Widerstand unterschiedlich sein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* müssen in jedem Zweig die Richtungen von Stromquelle und Spannung am Widerstand gleich sein	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* wird am besten die Matrix $\bar{R}^T$ über den Zusammenhang zwischen Maschen- und Zweigströmen bestimmt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* wird am besten die Matrix $\bar{R}^T$ über den Zusammenhang zwischen Potentialen und Zweigspannungen bestimmt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält die Matrix G auf der Hauptdiagonalen die Leitwerte der Zweige	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält die Matrix G außer in der Hauptdiagonalen keine Elemente	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält der Quellvektor die Quellspannungen der Zweige immer positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* enthält der Quellvektor die Quellspannungen der Zweige immer negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
* enthält der Quellvektor die Quellströme der Zweige immer positiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
* enthält der Quellvektor die Quellströme der Zweige immer negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
* enthält der Quellvektor die Quellströme der Zweige positiv oder negativ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

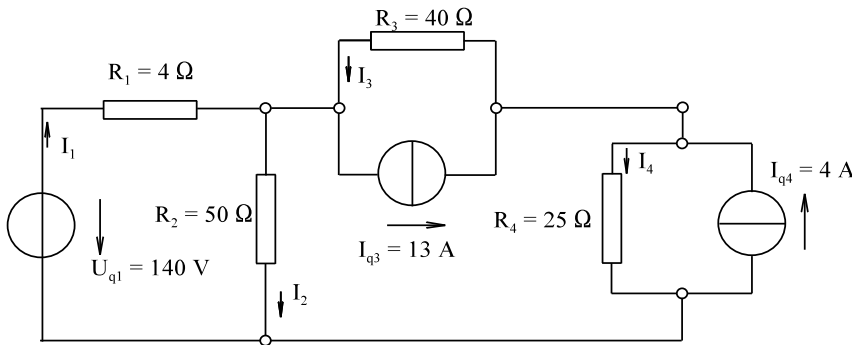
**Aufgabe 3.7.A**

Berechnen Sie die Spannungen  $U_1$  bis  $U_5$ . Wie groß ist  $U_{q6}$ ?



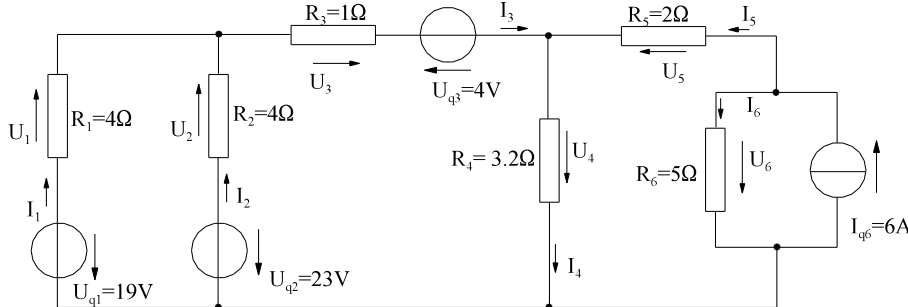
**Aufgabe 3.7.B** (Aufgabe 3, Klausur 04. Juli 97)

Für das dargestellte Netzwerk sind die Ströme  $I_1$  bis  $I_4$  mit Hilfe des Knotenpunkt-Potenzial-Verfahrens zu berechnen. **Achtung:** Als  $I_1$  wird der Strom  $I_1$  nach Zeichnung bezeichnet.



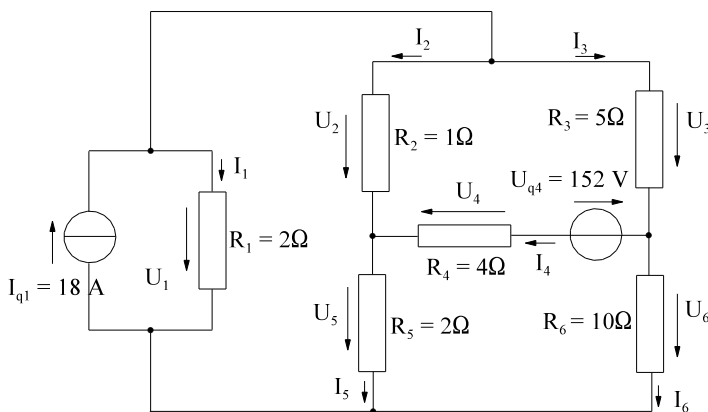
**Aufgabe 3.7.C**

- a) Berechnung sämtlicher Ströme und Spannungen nach dem manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren
- b) Berechnung sämtlicher Ströme und Spannungen nach dem Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren für Rechner



**Aufgabe 3.7.D**

- a) Berechnung sämtlicher Spannungen nach dem manuellen Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren
- b) Berechnung sämtlicher Ströme und Spannungen nach dem Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren für Rechner



### 3.8. Tricks bei Netzwerksberechnungen

In der Praxis wird oft ein Verständnis für Schaltungen benötigt. Dieses soll in diesem Abschnitt geübt werden. Ist in einer Klausur der Satz "Der Aufwand ist gering; die Anwendung einer bestimmten Regel liefert schon das Ergebnis." vorhanden, lässt sich die Berechnung leicht durchführen.

#### 3.8.1. Symmetrie-Überlegungen

**Prinzip:** Punkte gleichen Potential können entweder kurzgeschlossen werden oder aber auch die Verbindungen zwischen Punkten gleichen Potential aufgehoben werden. Weil:  $U = 0$  und  $I = 0$ .

**Beispiel:**

=> abgegliche Brücke weil

$$R_2 \cdot R_5 = R_3 \cdot R_4$$

$$120 \Omega \cdot 10 \Omega = 40 \Omega \cdot 30 \Omega$$

**Verbindung offen:**

$$I_1 = \frac{200 \text{ V}}{12.5 \Omega + \frac{150 \Omega \cdot 50 \Omega}{150 \Omega + 50 \Omega}} = 4 \text{ A}$$

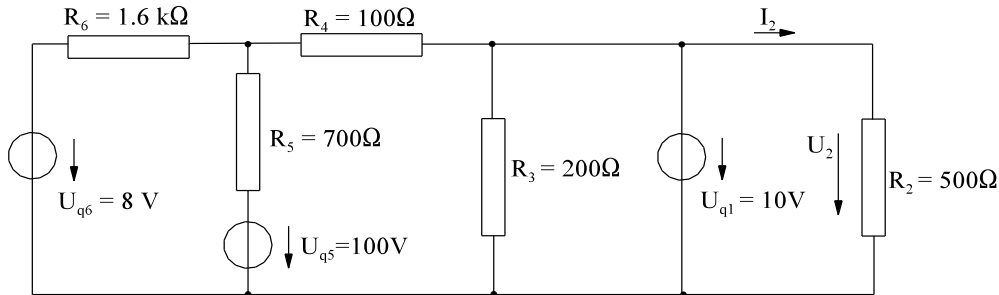
**Verbindung kurzschließen:**

$$I_1 = \frac{200 \text{ V}}{12.5 \Omega + 30 \Omega + 7.5 \Omega} = 4 \text{ A}$$

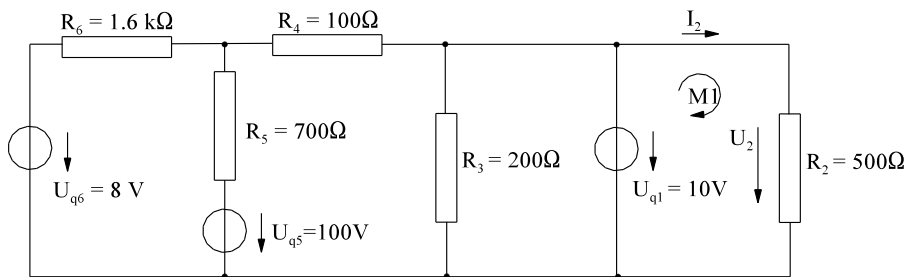
### 3.8.2. Netzwerkentkopplung durch ideale Spannungsquellen

**Prinzip:** Eine ideale Spannungsquelle bewirkt zwischen zwei Knoten eine eingeprengte Spannung. Nicht betrachtete Netzwerkeile die parallel zu einer idealen Spannungsquelle liegen, haben keinen Einfluss auf das Restnetzwerk. Dieses kann auch durch geschickten Maschenlauf berechnet werden.

**Beispiel 1:** Bestimmen Sie nur den Strom  $I_2$ , der Aufwand ist gering.



**Lösungsweg 1:** Maschenumlauf M1

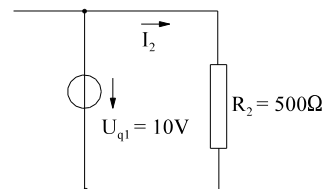
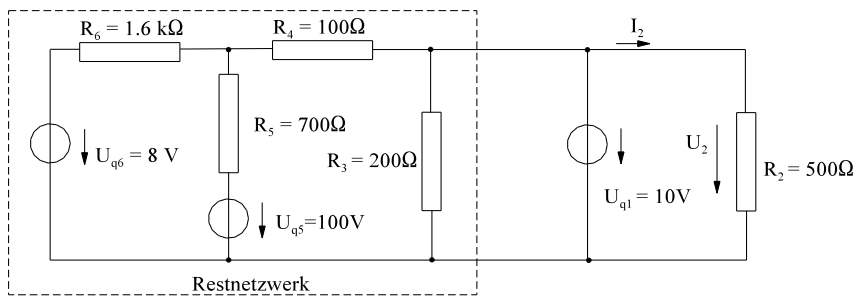


$$U_2 - U_{q1} = 0$$

$$U_2 = U_{q1} = R_2 \cdot I_2$$

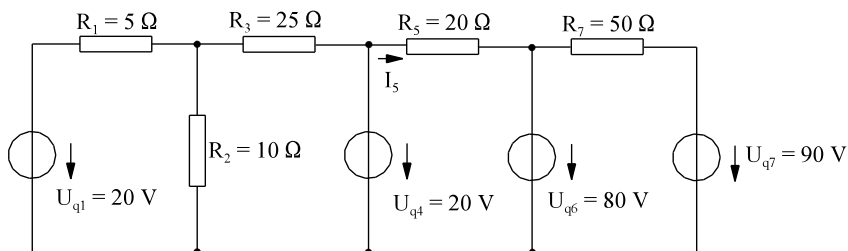
$$I_2 = \frac{U_{q1}}{R_2} = \frac{10V}{0.5k\Omega} = 20mA$$

**Lösungsweg 2:** Vernachlässigung des Restnetzwerkes



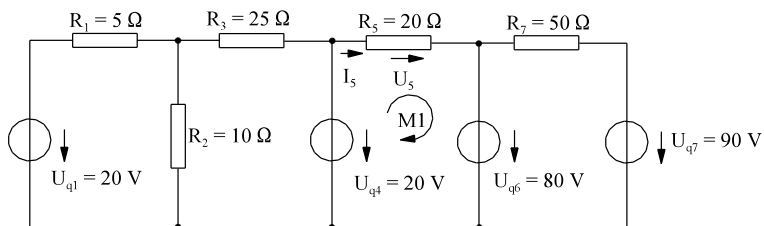
$$I_2 = \frac{U_{q1}}{R_2} = \frac{10V}{0.5k\Omega} = 20mA$$

**Beispiel 2:** (Aufgabe 4, Klausur vom 04.04.97)



Für das dargestellte Netzwerk ist **nur** der Strom  $I_4$  zu berechnen. Hinweis: Der Aufwand ist sehr gering.

**Lösungsweg 1:** Maschenumlauf

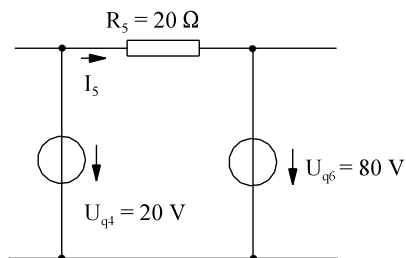
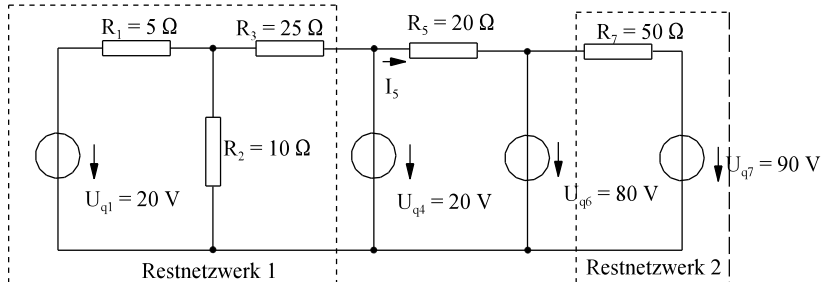


$$U_5 + U_{q6} - U_{q4} = 0$$

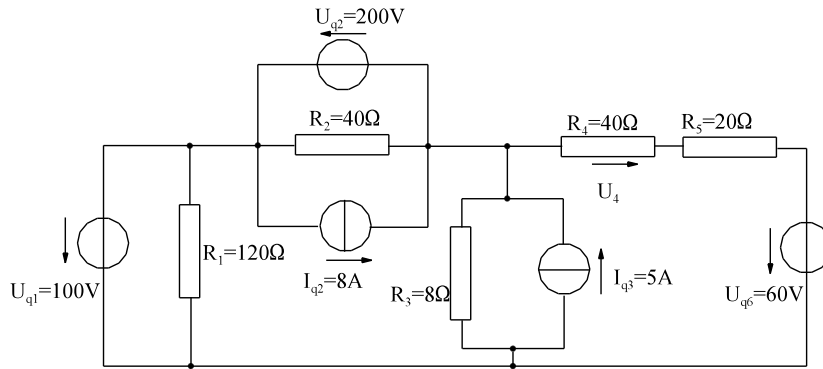
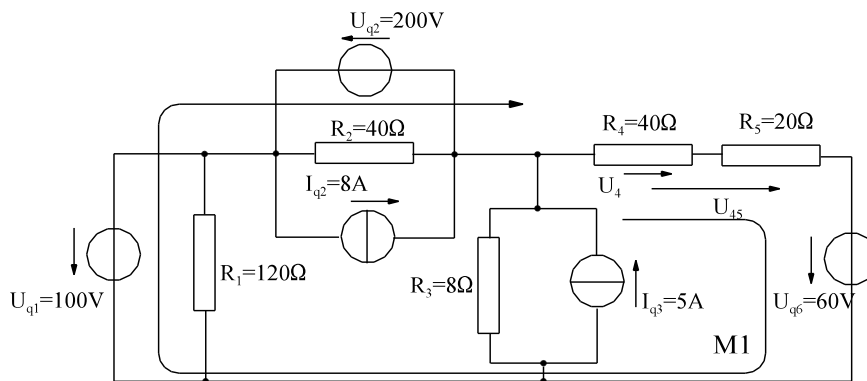
$$U_5 = U_{q4} - U_{q6} = 20\text{ V} - 80\text{ V} = -60\text{ V}$$

$$I_5 = \frac{U_5}{R_5} = \frac{-60\text{ V}}{20\Omega} = -3\text{ A}$$

**Lösungsweg 2:** zwei Restnetzwerke können vernachlässigt werden



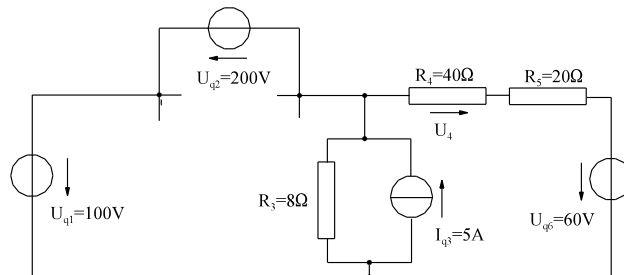
$$I_5 = \frac{U_{q4} - U_{q6}}{R_5} = \frac{20\text{ V} - 80\text{ V}}{20\Omega} = -3\text{ A}$$

**Beispiel 3:** (Aufgabe 3, Klausur vom 15.01.01)Berechnen Sie nur die Spannung  $U_4$ . Hinweis: Der Aufwand ist gering.**Lösungsweg 1:** Maschenumlauf und Spannungsteiler

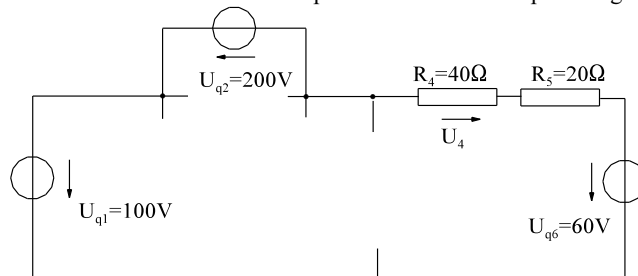
$$\begin{aligned} \text{M1: } U_{45} + U_{q6} - U_{q1} - U_{q2} &= 0 \\ U_{45} &= -U_{q6} + U_{q1} + U_{q2} = -60 \text{ V} + 100 \text{ V} + 200 \text{ V} = 240 \text{ V} \\ U_4 &= \frac{R_4}{R_4 + R_5} * U_{45} = \frac{40\Omega}{40\Omega + 20\Omega} * 240 \text{ V} = 160 \text{ V} \end{aligned}$$

**Lösungsweg 2:** Restnetzwerk

Schritt 1: Die Elemente parallel zu idealen Spannungsquellen können unberücksichtigt bleiben:



Schritt 2: Weitere Elemente parallel zu idealen Spannungsquellen können unberücksichtigt bleiben:



$$U_4 = \frac{R_4}{R_4 + R_5} * (U_{q1} + U_{q2} - U_{q6}) = \frac{40\Omega}{40\Omega + 20\Omega} * (100 \text{ V} + 200 \text{ V} - 60 \text{ V}) = 160 \text{ V}$$

### 3.8.3. Netzwerksentkopplung durch ideale Stromquellen

**Prinzip:** Eine ideale Stromquelle, die zwei Netzwerke verbindet kann diese entkoppeln. Das nicht betrachtete Netzwerk hat somit keinen Einfluss auf die eine Seite, siehe Beispiel 1. Die Reihenschaltung zu einer Stromquelle prägt diesen Strom ein.

**Beispiel 1:** Die Spannung  $U$  ist zu berechnen.

**Lösungsweg:**

Restnetzwerk kann weggelassen werden:

$$I = I_q$$

$$U = I * R = 3 \text{ k}\Omega * 2 \text{ mA} = 6 \text{ V}$$

**Beispiel 2:** (Aufgabe 5, Klausur vom 04.04.97)

Es ist **nur** der Strom  $I_4$  zu berechnen. Hinweis: Der Aufwand ist gering. Die Anwendung einer bestimmten Regel liefert schon das Ergebnis.

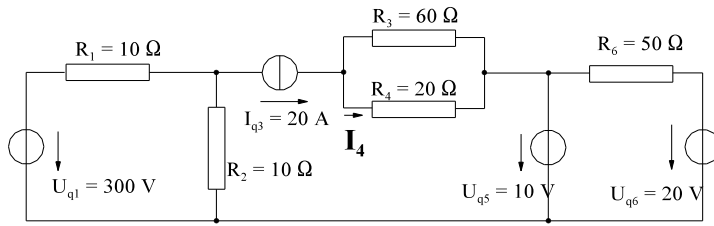
**Lösungsweg:** Restnetzwerk weglassen und Stromteilerregel

$$I_{34} = I_{q2} = 6 \text{ A}$$

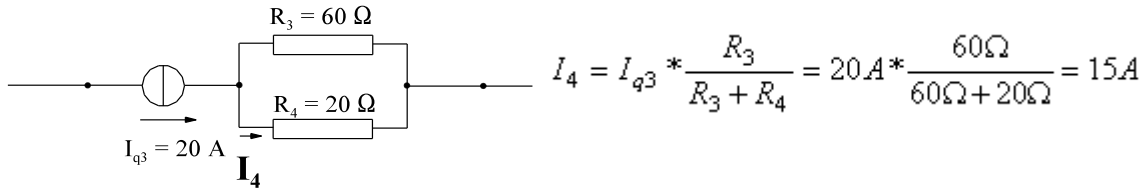
$$I_4 = I_{q2} * \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 6 \text{ A} * \frac{10 \Omega}{10 \Omega + 20 \Omega} = 2 \text{ A}$$

**Beispiel 3:** (Aufgabe 2, Klausur vom 13.01.99)

Für das dargestellte Netzwerk ist **nur** der Strom  $I_4$  zu berechnen. Hinweis: Der Aufwand ist gering. Die Anwendung einer bestimmten Regel liefert schon das Ergebnis.

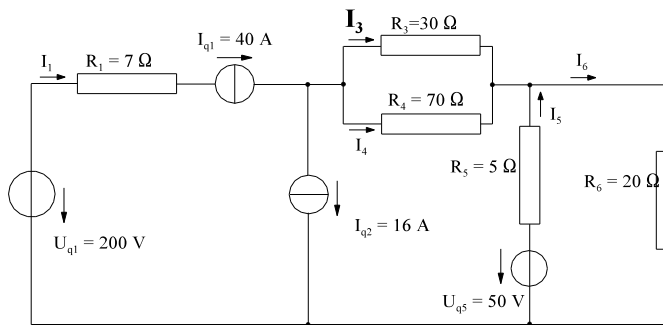


**Lösungsweg:** Zwei Restnetzwerk und Stromteiler

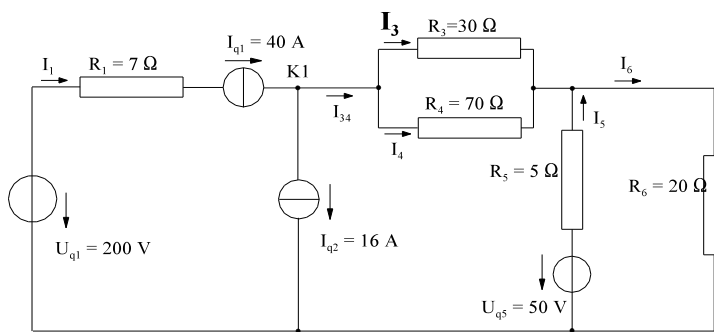


**Beispiel 4:** (Aufgabe 2, Klausur vom 23.06.99)

Berechnen Sie nur den Strom  $I_3$ . Hinweis: Der Aufwand ist gering.



**Lösungsweg:** Knotensumme bilden, Stromteiler



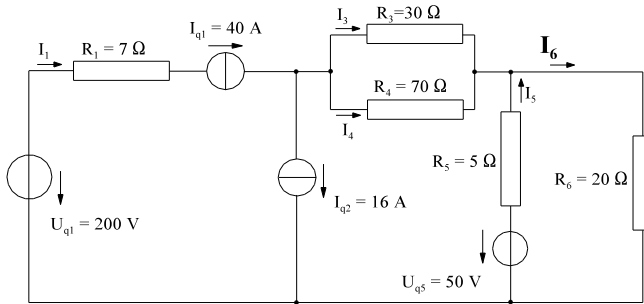
K1:  $I_{34} = I_{q1} - I_{q2} = 40A - 16A = 24A$

$$I_3 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} * I_{34} = \frac{70\Omega}{30\Omega + 70\Omega} * 24A = 16.8A$$



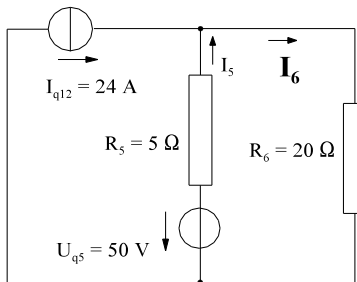
**Beispiel 5:**

Berechnen Sie den Strom  $I_6$ . Hinweis: Durch Netzentkopplung und anschließender Netzwerkwandlung ergibt sich die Lösung mit den geringstem Aufwand.

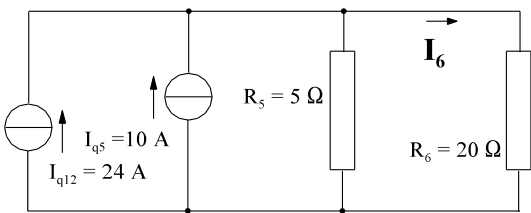


**Lösungsweg:**

Die Stromquellen werden addiert:  $I_{q12} = I_{q1} - I_{q2} = 40 \text{ A} - 16 \text{ A} = 24 \text{ A}$



**Netzumformung:**

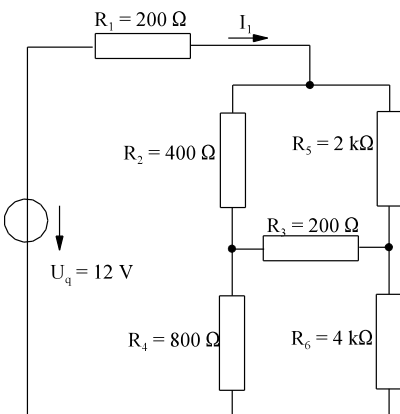


$$I_{q5} = \frac{U_{q5}}{R_5} = \frac{50V}{5\Omega} = 10A$$

$$I_6 = \frac{R_5}{R_5 + R_6} (I_{q12} + I_{q5}) = \frac{5\Omega}{5\Omega + 20\Omega} (24A + 10A) = 6.8A$$

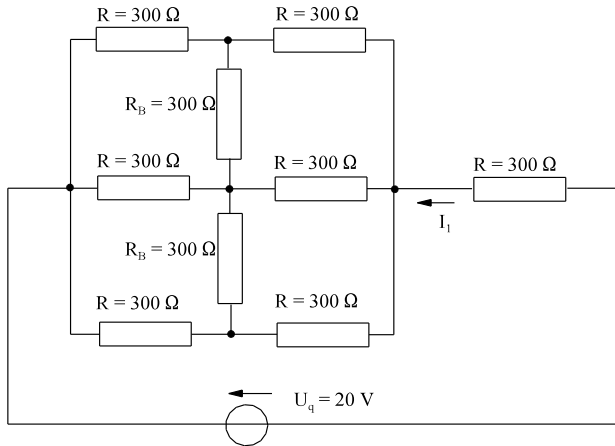
**3.8.4. Aufgaben zu Abschnitt 3.8**

**Aufgabe 3.8.A:**



Berechnen Sie den Strom  $I_1$ . **Hinweis:** Wenden Sie Symmetriebedingungen an.

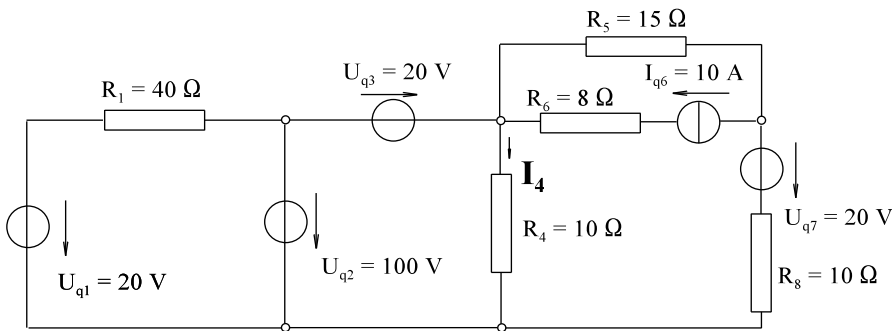
**Aufgabe 3.8.B:**



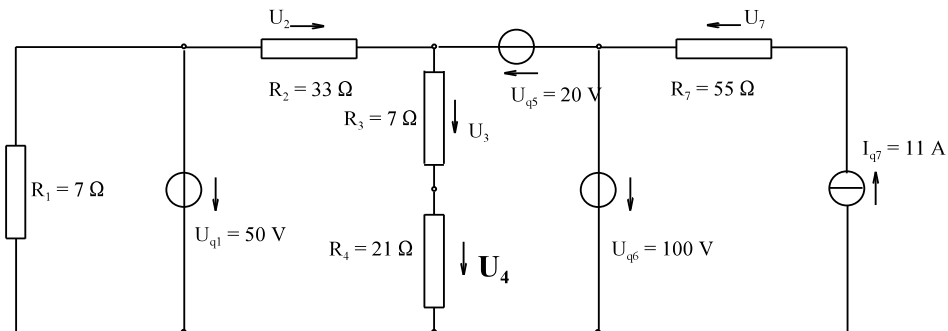
Berechnen Sie den Strom  $I_1$ . **Hinweis:** Wenden Sie Symmetriebedingungen an.

**Aufgabe 3.8.C:** (Aufgabe 3, Klausur vom 13.01.99)

Für das dargestellte Netzwerk ist **nur** der Strom  $I_4$  zu berechnen. **Hinweis:** Der Aufwand ist sehr gering.



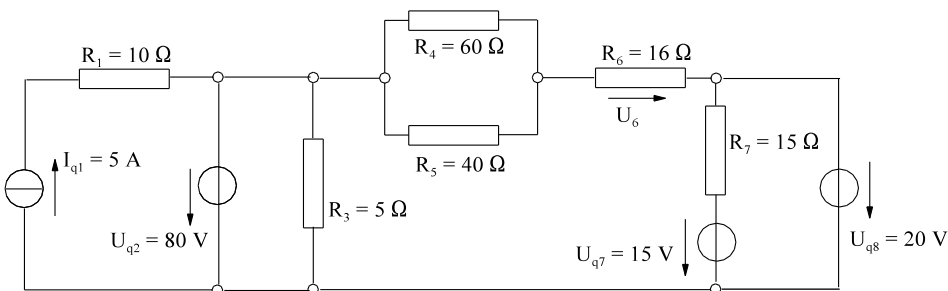
**Aufgabe 3.8.D:** (Aufgabe 1, Klausur vom 23.06.99)



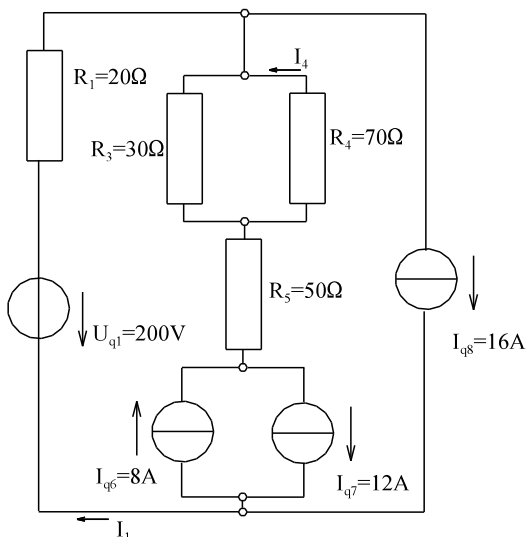
Berechnen Sie für das dargestellte Netzwerk nur die Spannung  $U_4$ . **Hinweis:** Der Aufwand ist gering.

**Aufgabe 3.8.E:** (Aufgabe 3, Klausur vom 24.06.02)

Berechnen Sie für das dargestellte Netzwerk nur die Spannung  $U_6$ . **Hinweis:** Der Aufwand ist gering.



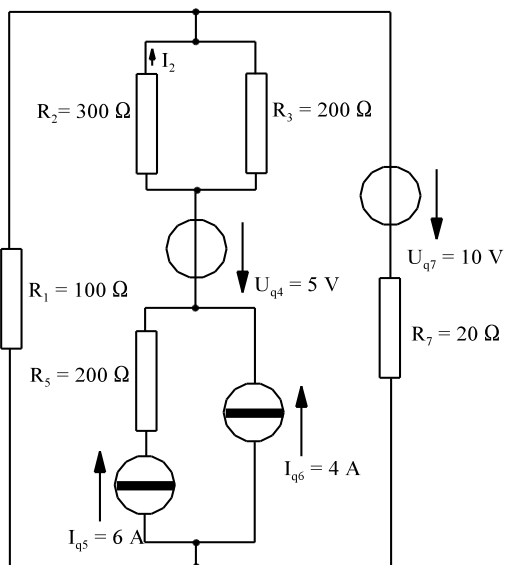
**Aufgabe 3.8.F:** (Aufgabe 4, Klausur vom 15.01.01)



Berechnen Sie für das dargestellte Netzwerk nur die Ströme  $I_1$  und  $I_4$ .

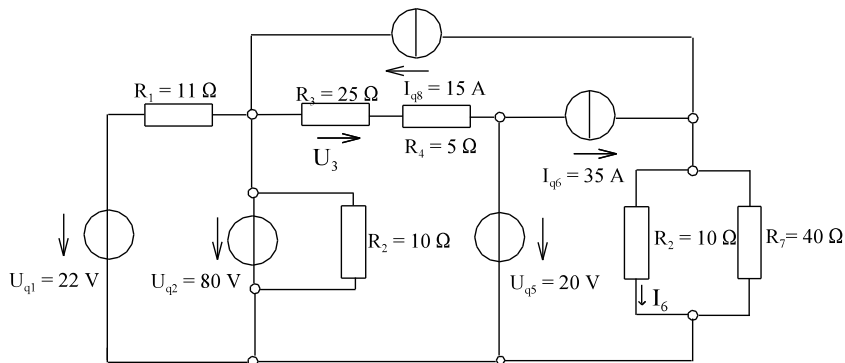
**Hinweis:** Der Aufwand ist gering.

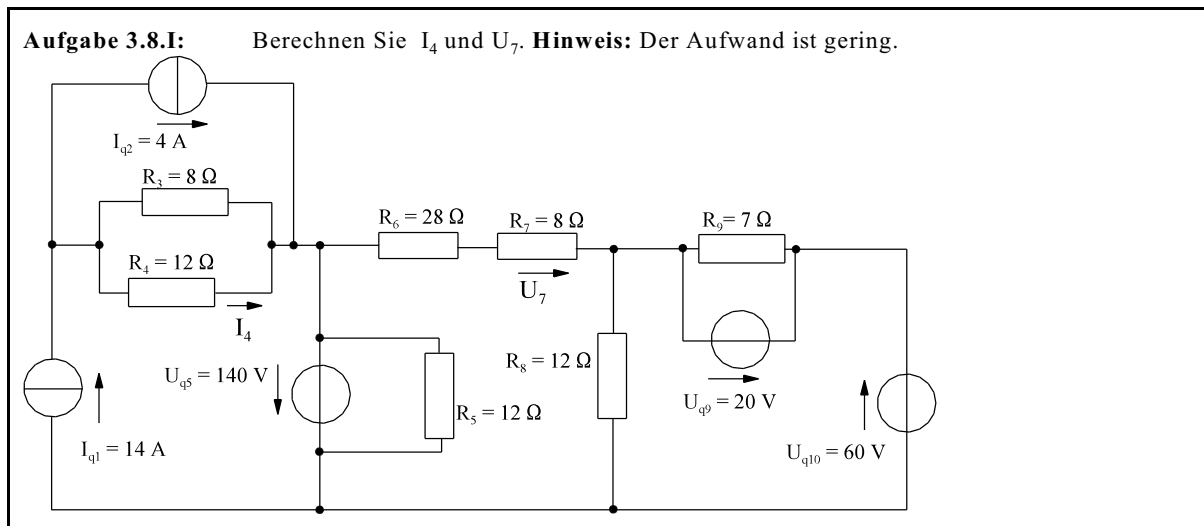
**Aufgabe 3.8.G:** (Aufgabe 2, Klausur vom 24.06.02)



Berechnen Sie für das dargestellte Netzwerk nur den Strom  $I_2$ . **Hinweis:** Der Aufwand ist gering.

**Aufgabe 3.8.H:** Berechnen Sie  $U_3$  und  $I_6$ . **Hinweis:** Der Aufwand ist gering.





## 3.9. Zusammenfassung der Verfahren für lineare Netzwerke

### 3.1. Einleitung

#### 3.1.1. Begriffe

#### 3.1.2. Normierung

### 3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze

### 3.3. Maschenstrom-Verfahren

### 3.4. Netz-Umwandlung

#### 3.4.1. Ersatzwiderstand

#### 3.4.2. Quellenwandlung

#### 3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung

#### 3.4.4. Verlegung idealer Stromquellen

#### 3.4.5. Umwandlung idealer Quellen

### 3.5. Überlagerungssatz

### 3.6. Ersatzquelle

### 3.7. Knotenpunkt-Potential-Verfahren

### 3.8. Tricks bei Netzwerksberechnungen

#### 3.8.1. Symmetrie-Überlegungen

#### 3.8.2. Netzwerkkopplung durch ideale Spannungsquellen

#### 3.8.3. Netzwerksentkopplung durch ideale Stromquellen

4. Energie und Leistung .....	160
4.1. Spannung, Potenzial, Feldstärke, Kraft .....	160
4.1.1. Spannung in SI-Einheiten .....	160
4.1.2. Potenzial und Feldstärke .....	161
4.1.3. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.1 .....	162
4.2. Bestimmungsgleichung der elektrischen Energie .....	164
4.3. Energiearten .....	165
4.3.1. Energie und Arbeit .....	165
4.3.2. Potentielle mechanische Energie .....	165
4.3.3. Kinetische Energie .....	165
4.3.4. Druckenergie .....	166
4.3.4.1. Druckenergie eines geschlossenen Systems .....	166
4.3.4.2. Arbeit im Druckfeld bei Volumenstrom .....	166
4.3.5. Thermische Energie .....	166
4.3.6. Schmelzwärme und Verdampfungsenergie .....	167
4.3.7. Mechanische Reibungsverluste .....	167
4.3.8. Magnetische Energie .....	167
4.3.9. Energie des elektrischen Feldes .....	168
4.3.10. Elektromagnetische Energie .....	168
4.3.11. Bindungsenergie .....	168
4.3.11.1. Chemische Energie .....	169
4.3.11.2. Kernenergie .....	169
4.3.12. Fragen zu Abschnitt 4.3 .....	170
4.4. Energiewandler .....	171
4.4.1. Wandlung in elektrische Energie .....	171
4.4.1.1. Generatoren .....	171
4.4.1.2. Akkumulator, Batterie .....	171
4.4.1.3. Thermoelemente .....	171
4.4.1.4. Fotoelement, Fotozelle, Solarzelle .....	171
4.4.2. Wandlung der elektrischen Energie .....	171
4.4.2.1. Motore .....	171
4.4.2.2. Elektrowärme .....	171
4.4.2.3. Elektrochemie .....	172
4.4.2.4. Beleuchtung .....	172
4.4.3. Turbine .....	172
4.4.4. Kraftwerke .....	172
4.4.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.4 .....	173
4.5. Elektrische Leistung .....	174
4.5.1. Leistung an einem ohmschen Widerstand .....	174
4.5.2. Leistungsbilanz und Wirkungsgrad .....	175
4.5.3. Leistungsanpassung .....	175
4.5.4. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.5 .....	181
4.6. Elektrisches Erwärmen .....	183
4.6.1. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 4.6 .....	184
4.7. Mechanische Leistung und Energie .....	186
4.7.1. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 4.7 .....	186
4.8. Energieübertragung über Gleichstromleitungen .....	187
4.8.1. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.8 .....	188

## 4. Energie und Leistung

### 4.1. Spannung, Potenzial, Feldstärke, Kraft

#### 4.1.1. Spannung in SI-Einheiten

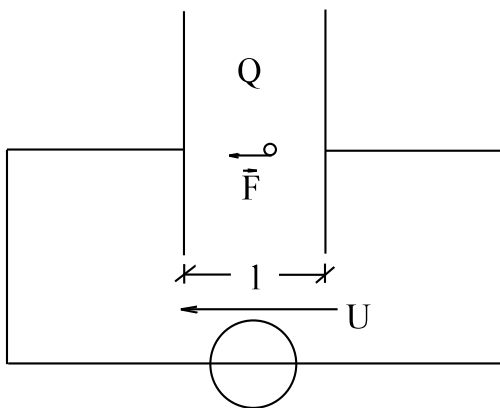
Die Ableitung der SI-Einheit der Spannung erfolgt über die Kraft auf eine elektrische Ladung im elektrischen Feld. Dazu wird der Versuch 4.1 nach Bild EG411A durchgeführt. Gemessen wird zwischen zwei Kondensatorplatten deren Abstand klein gegenüber dem Abmessungen der Platten ist. Dieses ergibt ein homogenes elektrisches Feld. Untersucht wird die Kraft auf eine Ladung, wobei die Größen

$l$  - Abstand der Platten

$U$  - anliegende Spannung und

$Q$  - Größe der Ladung

variiert werden.



**Bild EG411A:** Versuch 4.1: Kraft auf eine Ladung im elektrischen Feld

U	l	Q	F
$U_0$	$l_0$	$Q_0$	$F_0$
$2U_0$ $3U_0$	$l_0$ $l_0$	$Q_0$ $Q_0$	$2F_0$ $3F_0$
$U_0$ $U_0$	$2l_0$ $3l_0$	$Q_0$ $Q_0$	$F_0/2$ $F_0/3$
$U_0$ $U_0$	$l_0$ $l_0$	$2Q_0$ $3Q_0$	$2F_0$ $3F_0$

Ergebnis der Kraft  $F$  des Versuchs 4.1

Aus den Ergebnissen der Messung (siehe obere Tabelle) kann man erkennen, dass die Kraft auf die Ladung proportional zur Größe der Ladung und zur Spannung  $U$  ist und umgekehrt proportional sich zum Abstand  $l$  verhält:

$$F \sim Q \cdot \frac{U}{l}$$

Die obere Proportionalität kann auch mit Hilfe einer Proportionalitätskonstanten  $c$  beschrieben werden:

$$F = c \cdot Q \cdot \frac{U}{l}$$

Da die SI-Einheit der Spannung noch nicht definiert wurde, ist die Konstante  $c$  in der oberen Formel noch frei wählbar. Die einfachste Wahl mit  $c = 1$  ergibt:

$$F = Q \cdot \frac{U}{l}$$

Aus der oberen Formel lässt sich die SI-Einheit der Spannung bestimmen:

$$U = \frac{F \cdot l}{Q}$$

$$[l] = \text{m}$$

$$[Q] = \text{As}$$

$$[F] = [\text{m}] \cdot [\text{a}] = \text{kg m/s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

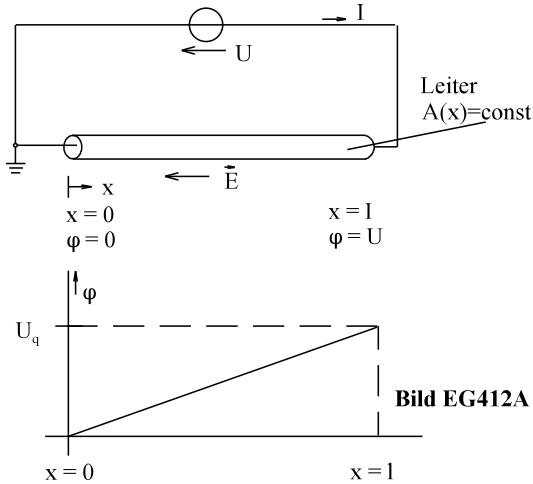
$$[U] = \frac{[F] \cdot [l]}{[Q]} = \frac{\text{kg m s}^{-2} \cdot \text{m}}{\text{As}}$$

$$[U] = \text{kg m}^2 \text{A}^{-1} \text{s}^{-3} = 1 \text{ V}$$

Damit ist die abgeleitete SI-Einheit "V" mit Hilfe der SI-Basis Einheiten kg, m, s und A zu beschreiben.

### 4.1.2. Potenzial und Feldstärke

Der Begriff des Potentials ist schon bekannt: Einem Punkt wird willkürlich des Potenzial  $\varphi_0 = 0 \text{ V}$  zugeordnet. Bei Netzwerkberechnungen wurde nur einzelnen Punkten (Knotenpunkte) ein Potenzial zugeordnet. Bei leitenden Materialien lässt sich jedem Punkt ein Potenzial zuordnen. Der Zusammenhang zwischen Potenzial und Feldstärke lässt sich am einfachsten an einem stromdurchflossenen Leiter gleichmäßigen Querschnitts erklären, siehe Bild EG412A.



Bei einem Leiter gleichen Querschnitts ergibt sich die in Bild EG412A dargestellte gleichmäßige Verteilung (linearer Anstieg) des Potentials. Mathematisch lässt sich die Abhängigkeit als Gerade durch Null beschreiben:

$$\varphi(x) = \frac{U}{l} * x \tag{A}$$

Der Ausdruck  $U/l$  wird betragsmäßig als Feldstärke bezeichnet

$$E = \frac{U}{l} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Länge}} \tag{B}$$

$$[E] = \frac{[U]}{[l]} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Die Richtung der Feldstärke wird definiert als die zugehörige Richtung der Stromdichte (siehe auch Bild EG412A). Damit ist die Feldstärke von Plus nach Minus und ist somit vom Ort höheren Potentials zum Ort niedrigeren Potentials gerichtet. In Bild EG412A zeigt die Feldstärke in Richtung der negativen x-Achse. Die Differentiation der Gleichung (A) unter Berücksichtigung des Vorzeichens ergibt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{U}{l} = -E_x \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$$

Bei Berücksichtigung von drei Koordinaten muss in jeder der drei Koordinatenrichtungen differenziert werden, da dieses aber partiell erfolgt, geht "d" über in "∂":

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial\varphi / \partial x \\ \partial\varphi / \partial y \\ \partial\varphi / \partial z \end{pmatrix} = -\text{grad}(\varphi)$$

In einem homogenen Feld ergibt:

sich die der Betrag der Feldstärke aus Spannung dividiert durch die Länge

$$E = \frac{U}{l}$$

oder die Spannung aus Feldstärke multipliziert mit der Länge:

$$U = E * l$$

In einem nicht homogenen Feld mit nur x-Komponente erhält man

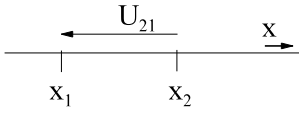
durch Differenzialrechnung die Feldstärke

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$$

und mit Hilfe der Integralrechnung das Potenzial

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{x=x_1}^{x_2} E_x dx$$

## 4.1.3. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.1

<p><b>Beispiel 1:</b>  <b>gegeben:</b> homogenes Feld  <math>U = 10 \text{ V}</math>  <math>l = 0.1 \text{ mm}</math>  <b>gesucht:</b> <math>E</math> (Betrag) -----  <b>Lösungsweg:</b>  <math display="block">E = \frac{U}{l} = \frac{10 \text{ V}}{0.1 \text{ mm}} = 100 \frac{\text{V}}{\text{mm}} = 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}</math></p>	<p><b>Beispiel 2:</b>  <b>gegeben:</b> homogenes Feld  <math>l = 30 \text{ mm}</math>  <math>E = 8 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}</math> (Betrag)  <b>gesucht:</b> <math>U</math> (Betrag) -----  <b>Lösungsweg:</b>  <math display="block">U = E * l = 8 \frac{\text{kV}}{\text{cm}} * 3 \text{ cm} = 24 \text{ kV}</math></p>
<p><b>Beispiel 3:</b>  <b>gegeben:</b> homogenes Feld  <math>\varphi_1(x_1=4\text{cm}) = 300 \text{ V}</math>  <math>\varphi_2(x_2=1\text{cm}) = 60 \text{ V}</math>  <b>gesucht:</b> <math>E_x</math> (mit Vorzeichen)  <b>Lösungsweg:</b>  <math display="block">E_x = - \frac{d\varphi}{dx} = - \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = - \frac{\varphi_2(x_2) - \varphi_1(x_1)}{x_2 - x_1} = - \frac{60 \text{ V} - 300 \text{ V}}{1 \text{ cm} - 4 \text{ cm}} = - 80 \frac{\text{V}}{\text{cm}}</math></p>	
<p><b>Beispiel 4:</b>  <b>gegeben:</b> homogenes Feld  <math display="block">E_x = 200 \frac{\text{V}}{\text{cm}}</math>  <math>x_2 = 5 \text{ cm}</math>  <math>x_1 = 2 \text{ cm}</math>  <b>gesucht:</b> <math>U_{21}</math> -----  <b>Lösungsweg:</b> Methode 1            Betrag: <math> U_{21}  =  E_x  *  x_2 - x_1  = 200 \frac{\text{V}}{\text{cm}} *  5 \text{ cm} - 2 \text{ cm}  = 600 \text{ V}</math>            Vorzeichen: <math>E_x &gt; 0</math> zeigt in positiver x-Richtung  <math>U_{21} &lt; 0</math> weil <math>E_x &gt; 0</math> und <math>U_{21}</math> in negativer x-Richtung zeigt  <math>\Rightarrow U_{21} = -600 \text{ V}</math></p> 	
<p><b>Lösungsweg:</b> Methode 2  <math display="block">\varphi_2 - \varphi_1 = U_2 - U_1 = U_{21} = - \int_{x=x_1=2\text{cm}}^{x_2=5\text{cm}} E_x dx = - \int_{x=x_1=2\text{cm}}^{x_2=5\text{cm}} 200 \frac{\text{V}}{\text{cm}} dx = - 200 \frac{\text{V}}{\text{cm}} * x \Big _{x=x_1}^{x_2}</math>  <math display="block">\varphi_2 - \varphi_1 = -200 \frac{\text{V}}{\text{cm}} * (x_2 - x_1) = -200 \frac{\text{V}}{\text{cm}} * (5 \text{ cm} - 2 \text{ cm}) = -600 \text{ V}</math></p>	
<p><b>Beispiel 5:</b>  <b>gegeben:</b> inhomogenes Feld  <math display="block">\varphi(x) = 100 \frac{\text{V}}{\text{cm}^2} * x^2</math>  <b>gesucht:</b> <math>E_x</math>  <b>Lösungsweg:</b>  <math display="block">E_x = - \frac{d\varphi}{dx} = - 2 * 100 \frac{\text{V}}{\text{cm}^2} * x = - 200 \frac{\text{V}}{\text{cm}^2} * x</math></p>	



**Beispiel 6:**  
**gegeben:** inhomogenes Feld

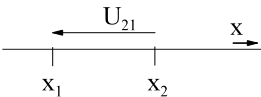
$$E_x = 800 \frac{V}{cm^2} * x$$

$x_2 = 6 \text{ cm}$   
 $x_1 = 2 \text{ cm}$

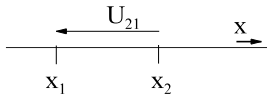
**gesucht:**  $U_{21}$

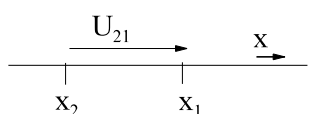
**Lösungsweg:**

$$U_{21} = - \int_{x_1=2cm}^{x_2=6cm} E_x dx = - \int_{x=2cm}^{6cm} 800 \frac{V}{cm^2} * x dx$$

$$U_{21} = - \frac{1}{2} * 800 \frac{V}{cm^2} * x^2 \Big|_{x=2cm}^{6cm} = -400 \frac{V}{cm^2} * [(6cm)^2 - (2cm)^2] = -128kV$$


Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.4.1.A</b>	Die SI-Einheit V wird hergeleitet über: * die Kraft einer Ladung im elektrischen Feld * die Kraft einer Ladung im magnetischen Feld * die Kraft eines Leiters im magnetischen Feld	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.1.B</b>	Eine positive Ladung erhält eine Kraftwirkung: * in Richtung der Feldstärke * entgegen der Richtung der Feldstärke	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.1.C</b>	Die Kraft auf eine Ladung nimmt: * mit der Feldstärke zu * mit der Feldstärke ab * mit der Ladung zu * mit der Ladung ab	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.1.D</b>	Die Einheit der Feldstärke kann angegeben werden in: * V/cm * V/cm <sup>2</sup> * V/m * V/m <sup>3</sup>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.1.E</b>	Der Vektor der Feldstärke zeigt: * vom höheren Potenzial zum niedrigeren Potenzial * vom niedrigeren Potenzial zum höheren Potenzial	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.1.F</b>	Der Vektor der Feldstärke zeigt bei einem Leiter: * in Richtung des Stromes (Stromdichte) * entgegen der Richtung des Stromes (Stromdichte)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

<p><b>Aufgaben 4.1.A:</b>  <b>gegeben:</b> homogenes Feld  <math>U = 20 \text{ V}</math>  <math>l = 0.05 \text{ mm}</math>  <b>gesucht:</b> E (Betrag)</p>	<p><b>Aufgaben 4.1.B:</b>  <b>gegeben:</b> homogenes Feld  <math>l = 2 \text{ mm}</math>  <math>E = 2.5 \frac{kV}{cm}</math> (Betrag)  <b>gesucht:</b> U (Betrag)</p>
<p><b>Aufgaben 4.1.C:</b>  <b>gegeben:</b> homogenes Feld  <math>\phi_1(x_1=8mm) = 20 \text{ V}</math>  <math>\phi_2(x_2=6mm) = 100 \text{ V}</math>  <b>gesucht:</b> <math>E_x</math> (mit Vorzeichen)</p>	<p><b>Aufgaben 4.1.D:</b>  <b>gegeben:</b> homogenes Feld  <math>E_x = -4 \frac{kV}{cm}</math>  <math>x_2 = 6 \text{ mm}</math>  <math>x_1 = 1 \text{ mm}</math>  <b>gesucht:</b> <math>U_{21}</math></p> 

<p><b>Aufgaben 4.1.E:</b>  <b>gegeben:</b> inhomogenes Feld  <math display="block">\varphi(x) = 30 \frac{V}{mm^3} * x^3</math>  <b>gesucht:</b> <math>E_x</math></p>	<p><b>Aufgaben 4.1.F:</b>  <b>gegeben:</b> inhomogenes Feld  <math display="block">E_x = 800 \frac{V}{cm^4} * x^3</math>  <math>x_2 = 2 \text{ mm}</math>  <math>x_1 = 6 \text{ mm}</math>  <b>gesucht:</b> <math>U_{21}</math></p> 
--	---

## 4.2. Bestimmungsgleichung der elektrischen Energie

Die Bestimmung der elektrischen Energie erfolgt über den Umweg der mechanischen Energie.

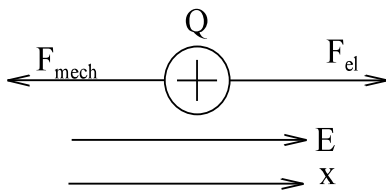


Bild EG42A

Die Ladung  $Q$  nach Bild EG42A soll im elektrischen Feld der Stärke  $E$  in  $x$ -Richtung bewegt werden. Nach Abschnitt 4.1 war die elektrische Kraft auf die Ladung:

$$F_{el} = Q * \frac{U}{l} = Q * E$$

Die mechanische Kraft ist entgegengesetzt zur elektrischen gerichtet:

$$F_{mech} = -F_{el} = -Q * E = -Q * \left( -\frac{d\varphi}{dx} \right) = Q * \frac{d\varphi}{dx} \quad (A)$$

Die mechanische Energie ergibt sich durch Integration:

$$W_{mech} = \int_{x_1}^{x_2} F_{mech} dx = \int_{(1)}^{(2)} F_{mech} dx$$

Die mechanische Energie wird gleich der elektrischen gesetzt, danach die Kraft durch (A) ersetzt:

$$W_{el} = W_{mech} = \int_{(1)}^{(2)} F * dx = \int_{(1)}^{(2)} Q * \frac{d\varphi}{dx} * dx$$

$$W_{el} = Q \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = Q * (\varphi_2 - \varphi_1) = Q * (U_2 - U_1) = Q * U_{21}$$

Damit ergibt sich die elektrische Energie aus Ladung und Potenzialdifferenz. Für den Gleichstromfall kann  $Q$  ersetzt werden

$$Q = I * t$$

damit kann für Gleichstrom angegeben werden:

$$W_{el} = U * I * t$$

oder für zeitabhängige Größen:

$$W_{el} = \int i * u * dt$$

## 4.3. Energiearten

### 4.3.1. Energie und Arbeit

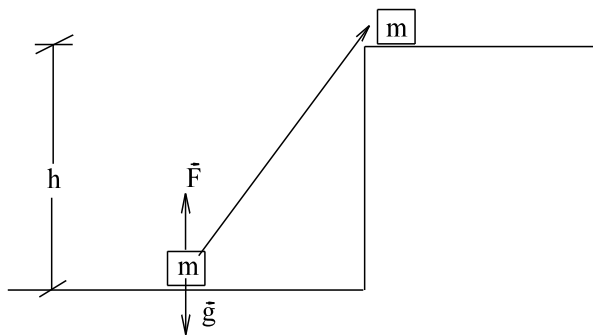
Physikalische **Arbeit** wird z.B. verrichtet, wenn an einem Körper die Kraft  $F$  angreift und der Körper längs der Richtung von  $F$  bewegt wird:

$$W_{\text{Arbeit}} = \int F \cdot ds$$

Was ist nun Energie?

**Energie** ist die Fähigkeit Arbeit zu verrichten. Energie ist speicherbar. Um eine physikalische Arbeit zu verrichten, bedarf es einer **Energieumwandlung**.

### 4.3.2. Potentielle mechanische Energie



Wird ein Körper im Schwerfeld der Erde um die Höhe  $h$  angehoben, muss folgende Arbeit verrichtet werden:

$$W_{\text{Arbeit}} = \int F \cdot ds = \int (m \cdot g) ds = m \cdot g \cdot h$$

Bild EG432A

Diese verrichtete Arbeit wird im Kraftfeld der Erde mit Hilfe der Masse  $m$  als potentielle Energie gespeichert.

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

### 4.3.3. Kinetische Energie

Wird ein Körper beschleunigt, greift die folgende Kraft an:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

Die geleistete Arbeit ergibt sich aus:

$$W_{\text{Arbeit}} = \int F ds = \int m \frac{dv}{dt} \cdot ds = \int m \frac{ds}{dt} \cdot dv = m \int v \cdot dv = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Diese geleistete Arbeit wird als **kinetische Energie der linearen Bewegung** gespeichert:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Bei der Drehbewegung ergibt sich mit

$\Theta = \int R^2 \cdot dm$	- Massenträgheitsmoment	$[\Theta] = \text{kgm}^2$
$\omega$	- Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \text{s}^{-1}$
$R$	- Radius	$[R] = \text{m}$

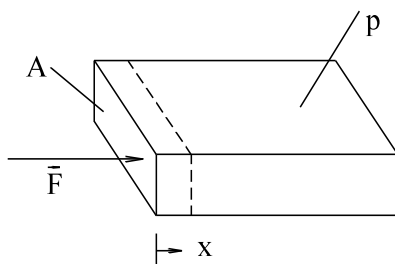
die **kinetische Energie der Drehbewegung**:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \theta \cdot \omega^2$$

### 4.3.4. Druckenergie

#### 4.3.4.1. Druckenergie eines geschlossenen Systems

Bei einem geschlossenen System erfolgt kein Massenstrom über die veränderliche Systemgrenze, z.B. geschlossener Kolben, siehe Bild EG4341A.



Bei Kompression wird die Kraft  
 $F = p \cdot A$

aufgebraucht. Die benötigte Arbeit  
 $W = \int F \cdot dx = \int p \cdot A \cdot dx$

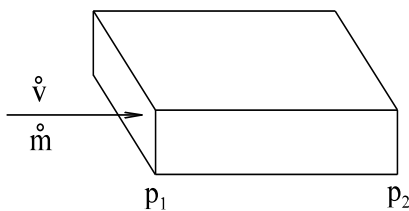
kann mit  
 $A \cdot dx = -dV$

Bild EG4341A

als die Druckenergie des Volumens bei konstanter Masse angegeben werden:

$$W_p = -\int p \cdot dV$$

#### 4.3.4.2. Arbeit im Druckfeld bei Volumenstrom



Wird ein Massen(Volumen)strom im Druckfeld bewegt, erfährt er nach Bild EG4342A zwischen den Punkten 1 und 2 eine Änderung der inneren Energie

$$W = V \cdot p_2 - V \cdot p_1 = V(p_2 - p_1) = V \cdot \Delta p$$

$$W_p = \int V \cdot dp$$

$$P = \dot{V} \cdot \Delta p = \int \dot{V} \cdot dp$$

Bild EG4342A

### 4.3.5. Thermische Energie

Die Zustandsgröße Temperatur beinhaltet Schwingungen der Elektronen, Atomkerne und der Moleküle. Diese Schwingungen enthalten wiederum kinetische Energie der Bewegung. Wird ein Körper erhitzt, muss diesem Energie in Form von Wärme zugeführt werden. Der thermische Energieinhalt ist somit von der Temperatur abhängig, im allgemeinen nichtlinear, kann aber mit Hilfe einer Materialkonstanten linear durch eine Gerade angenähert werden:

$$W_{\text{ther}} = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) = m \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) = m \cdot c \cdot \Delta T = m \cdot c \cdot \Delta \vartheta$$

c - Spezifische Wärme

$$[c] = \frac{Ws}{kg \cdot K} = \frac{Ws}{kg \cdot ^\circ C}$$

### 4.3.6. Schmelzwärme und Verdampfungsenergie

**Versuch 4.2:** Eis ( $H_2O$ , Wasser im festen Zustand) der Temperatur  $\vartheta = -50\text{ °C}$  wird eine konstante Wärmemenge (Energie pro Zeit = Leistung) zugeführt. **Ergebnis:** Die Temperatur steigt kontinuierlich bis auf  $0\text{ °C}$  an verbleibt danach eine längere Zeitspanne, bis das gesamte Eis geschmolzen ist. Danach steigt die Temperatur wieder kontinuierlich bis  $100\text{ °C}$  an und verbleibt eine noch längere Zeit bei dieser Temperatur verharren, bis das gesamte Wasser verdampft ist. **Fazit:** Um von einem Aggregatzustand zum anderen zu gelangen, wird Energie benötigt. **Grund:** Die Bindungen müssen gelöst werden. Die Schmelzwärme und die Verdampfungsenergie sind von der Masse und einer Stoffkonstanten abhängig.

$$W_{\text{schm}} = q \cdot m$$

$$W_{\text{verd}} = r \cdot m$$

$$q \text{ - spezifische Schmelzwärme} \quad [q] = \frac{Ws}{kg}$$

$$r \text{ - spezifische Verdampfungsenergie} \quad [r] = \frac{Ws}{kg}$$

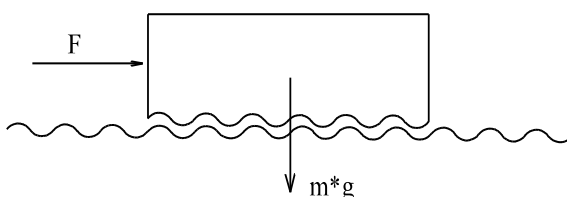
Die oben beschriebenen Vorgänge sind reversible, d.h. in der anderen Richtung wird beim Kondensieren (Übergang gasförmig nach flüssig) die vorher aufgebrauchte Verdampfungsenergie als Kondensationswärme wieder frei. Beim Erstarren (Übergang flüssig nach fest) wird auch die aufgebrauchte Schmelzwärme als Erstarrungswärme wieder frei.

Schmelzwärme, Verdampfungsenergie und auch die spezifische Wärme sind materialabhängig und können aus Tabellen entnommen werden. Eine kleine Auswahl zeigt Tabelle 4.1.

Material	Schmelzwärme q in $kWskg^{-1}$	Verdampfungsenergie r in $kWskg^{-1}$	spezifische Wärme c in $Wskg^{-1}K^{-1}$
$H_2O$	334 bei $0\text{ °C}$	2256 bei $100\text{ °C}$	4187
Alu	396 bei $659\text{ °C}$	11700 bei $2500\text{ °C}$	896
Ammoniak	1370 bei $-33.4\text{ °C}$		4470

**Tabelle 4.1:** Schmelzwärme, Verdampfungsenergie und spezifische Wärme einiger Stoffe

### 4.3.7. Mechanische Reibungsverluste



Die zur Überwindung der Reibung aufgebrauchte Arbeit wird in Wärme umgesetzt. Dieser Vorgang ist irreversibel, d.h. er kann nicht umkehrbar gemacht werden. Die Reibung bewirkt somit Verlustenergie bzw. Verlustleistung.

Bild EG437A

### 4.3.8. Magnetische Energie

Die Energie des magnetischen Feldes pro Volumen beträgt (3.Semester) allgemein:

$$\frac{W_{\text{mag}}}{V} = \int HdB$$

und im linearen Fall ( $B = \mu \cdot H$ )

$$\frac{W_{\text{mag}}}{V} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} B^2$$

und für konzentrierte Energiespeicher (Induktivitäten):

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

### 4.3.9. Energie des elektrischen Feldes

Die Energie des elektrischen Feldes pro Volumen beträgt (2.Semester):

$$\frac{W_{el}}{V} = \frac{1}{2} \vec{E} * \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 * \epsilon_r * E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_0 * \epsilon_r}$$

und für konzentrierte Energiespeicher (Kapazität, Kondensator):

$$W_{el} = \frac{1}{2} C * U^2$$

### 4.3.10. Elektromagnetische Energie

Die elektromagnetischen Wellen umfassen weite Frequenz- und Wellenlängenbereiche. Die verschiedenen Arten sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Am bekanntesten ist das Licht, Fernseh- und Rundfunkwellen und die Wärmestrahlung.

Strahlungsart	Wellenlänge	Frequenz
Höhenstrahlung	$10^{-12}$ m	$3 * 10^{20}$ Hz
Röntgenstrahlung	$10^{-9}$ m	$3 * 10^{17}$ Hz
UV-Licht	$\approx 10^{-7}$ m	$\approx 3 * 10^{15}$ Hz
Licht	380 nm ... 780 nm	
IR-Licht	$\approx 1 \mu\text{m}$	$\approx 3 * 10^{14}$ Hz
Wärmestrahlung	$\approx \mu\text{m} \dots 1 \text{ mm}$	$(3 * 10^{14} \dots 3 * 10^{11})$ Hz
mm Wellen	1 mm	300 GHz
cm Wellen	1 cm	30 GHz
dm Wellen	1 dm	3 GHz
Rundfunk + Fernsehen	1 m .. 10 km	300 MHz ... 30 kHz

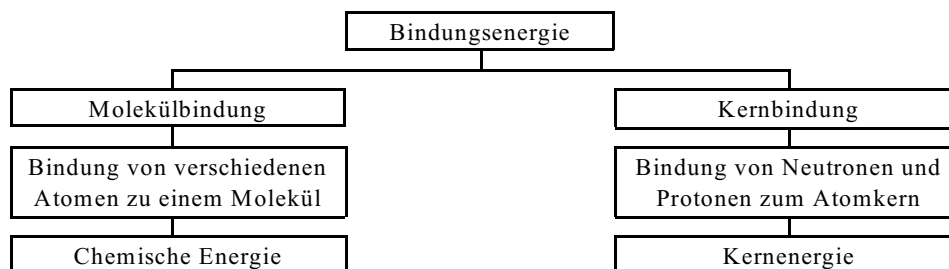
**Tabelle 4.2:** Wellenlängen- und Frequenz-Bereiche der elektromagnetischen Strahlung

Eine Übersicht über die Farben des Lichtes zeigt Tabelle 4.3.

Farbe	UV	violett	blau	grün	gelb	rot	IR
Wellenlänge in nm		380				780	

**Tabelle 4.3:** Wellenlängenbereich und Farben des sichtbaren Lichtes

### 4.3.11. Bindungsenergie



#### 4.3.11.1. Chemische Energie

Jede chemische Reaktion ist mit einer **Energiedifferenz** verbunden.

**Exotherme Vorgänge** verlaufen unter Energieabgabe. Am bekanntesten ist die Verbrennung, eine Reaktion mit Sauerstoff. Damit eine **endotherme Reaktion** erfolgt, muss Energie zugeführt werden.

Beispiel aus der Natur: Sauerstoffkreislauf. Menschen und Tiere produzieren ihre benötigte Energie durch Verbrennung von Sauerstoff. Die Pflanzen setzen mit Hilfe der Energiezufuhr Sonnenlicht gebundenen Sauerstoff wieder frei.

Mehr zur Elektrochemie in Abschnitt 5.4.

#### 4.3.11.2. Kernenergie

Seit Einstein ist bekannt: Masse und Energie sind äquivalent:

$$E = m \cdot c^2$$

Da die obere Formel besser als Energie mit E bekannt ist, wurde hier auf den Formelbuchstaben W verzichtet. In der Elektrotechnik würde der Formelbuchstabe E zu Verwechslungen mit der elektrischen Feldstärke führen. Die obere Formel sei am Beispiel Helium untersucht.

Helium besteht aus 2 Protonen, 2 Neutronen und 2 Elektronen.

Masse Helium: 4.0024 u

Masse 2 Protonen, 2 Neutronen und 2 Elektronen 4.0330 u

Es besteht eine Differenz in der Masse von

$$\Delta m = 4.0330 \text{ u} - 4.0024 \text{ u} = 0.0306 \text{ u}$$

Wo bleibt diese Masse, wenn ein Heliumatom aus oberen Bestandteilen zusammengesetzt würde? Antwort: Die Differenz der Masse  $\Delta m$ , auch Massendefekt genannt, wird als Energie abgegeben.

$$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\Delta m = 0.0306 \text{ u} = 0.0306 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 5.08 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

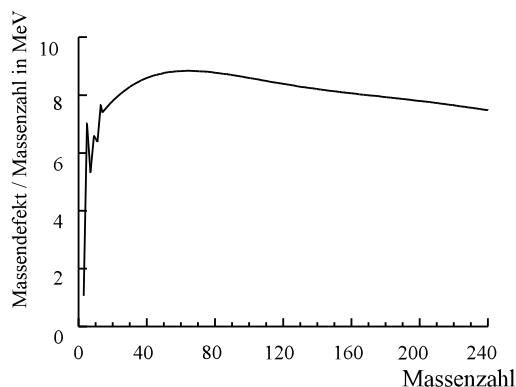
$$\Delta W = c^2 \cdot \Delta m = (3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1})^2 \cdot 5.08 \cdot 10^{-29} \text{ kg} = 4.57 \cdot 10^{-12} \text{ Ws}$$

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Ws}$$

- Elektronenvolt

$$\Delta W = \frac{4.57 \cdot 10^{-12} \text{ Ws}}{1.6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{Ws}}{\text{eV}}} = 28.6 \cdot 10^6 \text{ eV} = 28.6 \text{ MeV}$$

Untersucht man alle Elemente des Periodensystems und stellt den Massendefekt als Funktion der Massenzahl (Anzahl Protonen + Neutronen) dar, erhält man das in Bild EG43112A dargestellte Ergebnis. Um die Ergebnisse vergleichen zu können, ist in Bild EG43112A der Massendefekt pro Massenzahl dargestellt.



Aus Bild EG43112A ist zu erkennen, wie man aus der Kernbindung Energie gewinnen kann: Man muss in Elementen wandeln, die einen größeren Massendefekt aufweisen. Da gibt es zwei Möglichkeiten:

Bild EG43112A: Massendefekt

**Kernfusion**

Die Verschmelzung von kleinen Kernen zu größeren Elementen wird Kernfusion genannt. Die kontrollierte Fusion über einen längeren Zeitraum ist bis jetzt noch nicht gelungen.

**Kernspaltung**

Die Spaltung von Elementen mit Massenzahlen größer 200 ergibt auch einen Massendefekt. Dieses wird in Kernkraftwerken zur Energieumwandlung genutzt.

**4.3.12. Fragen zu Abschnitt 4.3**

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.4.3.A</b>	Energie ist die Fähigkeit Arbeit zu leisten. Arbeit ist die Fähigkeit Energie zu leisten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.3.B</b>	Die potentielle Energie nimmt zu: <ul style="list-style-type: none"> <li>* mit der Höhe linear</li> <li>* mit der Höhe quadratisch</li> <li>* mit der Masse linear</li> <li>* mit der Masse quadratisch</li> <li>* mit der Geschwindigkeit linear</li> <li>* mit der Geschwindigkeit quadratisch</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.3.C</b>	Die kinetische Energie nimmt zu: <ul style="list-style-type: none"> <li>* mit der Höhe linear</li> <li>* mit der Höhe quadratisch</li> <li>* mit der Masse linear</li> <li>* mit der Masse quadratisch</li> <li>* mit der Geschwindigkeit linear</li> <li>* mit der Geschwindigkeit quadratisch</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.3.D</b>	Potentielle Energie kann sein Energie der: <ul style="list-style-type: none"> <li>* Lage</li> <li>* translatorischen Bewegung</li> <li>* rotatorischen Bewegung</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.3.F</b>	Kinetische Energie kann sein Energie der: <ul style="list-style-type: none"> <li>* Lage</li> <li>* translatorischen Bewegung</li> <li>* rotatorischen Bewegung</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.3.G</b>	Thermische Energie basiert auf <ul style="list-style-type: none"> <li>* Energie der Lage</li> <li>* Schwingungen von Elementarteilchen</li> <li>* kinetischer Energie</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.3.H</b>	Beim Überführen von Eis nach Wasserdampf wird Energie benötigt zum: <ul style="list-style-type: none"> <li>* Erwärmen</li> <li>* Abkühlen</li> <li>* Erstarren</li> <li>* Schmelzen</li> <li>* Verdampfen</li> <li>* Kondensieren</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.3.I</b>	Elektromagnetische Energie kann sein: <ul style="list-style-type: none"> <li>* Höhenstrahlung</li> <li>* Röntgenstrahlung</li> <li>* UV-Licht</li> <li>* Licht</li> <li>* IR-Licht</li> <li>* Wärmestrahlung</li> <li>* Rundfunk-und Fernsehwellen</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.3.J</b>	Bindungsenergie kann vorkommen in Form von <ul style="list-style-type: none"> <li>* Molekülbindung</li> <li>* Kernbindung</li> <li>* Skibindung</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.3.K</b>	Molekülbindung bewirkt: <ul style="list-style-type: none"> <li>* chemische Energie</li> <li>* Kernenergie</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.4.3.L</b>	Kernbindung bewirkt: <ul style="list-style-type: none"> <li>* chemische Energie</li> <li>* Kernenergie</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :			richtig	falsch
AF.4.3.M	Kernbindung bewirkt:	* Veränderung der Masse	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* in jedem Fall eine Energieabgabe	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* einen so genannten Massendefekt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.4.3.N	Kernfusion ist die Fusion von:	* großen Atomen (große Massenzahl)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* kleinen Atomen (kleine Massenzahl)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.4.3.0	Kernspaltung ist die Spaltung von:	* großen Atomen (große Massenzahl)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* kleinen Atomen (kleine Massenzahl)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## 4.4. Energiewandler

### 4.4.1. Wandlung in elektrische Energie

#### 4.4.1.1. Generatoren

Generatoren wandeln die **mechanische Energie** an der Welle um in elektrische Energie. Ursache: Induktionsgesetz, Lorentz-Kraft, siehe Kap. 9 (3. Semester).

#### 4.4.1.2. Akkumulator, Batterie

Akkumulatoren und Batterien wandeln **chemische Energie** in elektrische. Ursache: elektrochemische Spannungsreihe hervorgerufen durch unterschiedliche Lösbarkeit der Elektroden im Elektrolyten, siehe auch Abschnitt 5.4.

#### 4.4.1.3. Thermoelemente

Thermoelemente wandeln **thermische Energie** in Form von Temperaturunterschieden in elektrische Energie, siehe auch Abschnitt 5.3. Die Energiemenge ist hierbei gering. Thermoelemente werden nur zu Messzwecken eingesetzt.

#### 4.4.1.4. Fotoelement, Fotozelle, Solarzelle

Diese wandeln **Strahlungsenergie** in Form von Licht direkt in elektrische Energie um.

### 4.4.2. Wandlung der elektrischen Energie

#### 4.4.2.1. Motore

Motore wandeln elektrische Energie in **mechanische Energie** um. Die Energie steht an der Welle der Maschine in Form von Drehmoment und Drehzahl zur Verfügung. Siehe auch Kap. 9 (3. Semester). Ursache: Lorentz Kraft (Leiter im Magnetfeld).

#### 4.4.2.2. Elektrowärme

Wird ein ohmscher Widerstand vom Strom durchflossen, erfolgt immer die Umwandlung von elektrischer Energie nach **thermischer (Verlust) Energie**. In den meisten Fällen ist diese Verlustwärme ungewollt und muss aus dem Gerät abgeführt werden. Dieses kann durch Lüfter, Kühlkörper, Kühlrippen oder Flüssigkeitskühlung erfolgen. Die großen Geräte (z.B. Trafo  $S_N = 500 \text{ MVA}$ ) weisen im Gegensatz zu kleinen Geräten eine wesentlich kleinere Oberfläche in Bezug zur Verlustleistung auf. Dieses bedingt eine Kühlung von außen durch Luft, Wasser oder Öl.

Eine bewusste Ausnutzung der thermischen Verlustwärme erfolgt bei Geräten der Elektrowärme.

Im Haushalt ist z.B. die Kochplatte, das Heißwassergerät, der Heizlüfter oder der Föhn bekannt, im Labor der LötKolben. Diese Geräte weisen einen Heizwiderstand auf, in dem die Energie umgesetzt wird. Man spricht hier von **Widerstandeserwärmung**.

Bei der **konduktiven Erwärmung** wird der Strom direkt durch das zu erwärmende Gut geführt. Beispiel: Kupferdrähte werden zum Glühen mit hoher Geschwindigkeit durch zwei Kontakte gezogen. Der hohe Strom erwärmt den Draht. Am Ende wird abgeschreckt. Geschwindigkeit und Strom müssen so gewählt werden, dass sich die richtige Temperatur einstellt.

**Lichtbogenöfen** sind mit die größten Einzelverbraucher in der Energietechnik. Hier brennen zwischen einer (bei DC) oder drei (bei AC) Elektroden und dem Einsatzgut (Stahl oder Schrott) Lichtbögen als ohmscher Widerstand, von denen aus Wärme zum Einsatzgut übergeht.

Bei **Induktionsöfen** wird die Wärme mit Hilfe des Transformator-Prinzips direkt im leitfähigen zu erwärmenden Gut umgesetzt.

Weitere Arten der elektrischen Erwärmung sind:

- Plasmabrenner
- Dielektrische Erwärmung (Mikrowelle)
- Elektronenstrahl-Erwärmung
- Laser Erwärmung
- Funkenerosion

#### 4.4.2.3. Elektrochemie

Beim Aufladen von Akkumulatoren und bei der Elektrolyse wird elektrische Energie in **chemische Energie** umgewandelt.

Bei der Elektrolyse wandern Stoffe (Ionen) von einer Elektrode zur anderen. An den Elektroden können chemische Reaktion ablaufen, als Beispiel: Aufspaltung von Wasser zu Sauerstoff und Wasserstoff. Aber auch chemisch reine Stoffe können mit der Elektrolyse gewonnen werden.

#### 4.4.2.4. Beleuchtung

In Lampen erfolgt die Umsetzung von elektrischer Energie in u.a. **Strahlungsenergie** (Licht, elektromagnetische Welle).

Was ist Licht? Licht ist elektromagnetische Strahlung. Wie entsteht Licht? Atome können verschiedene diskrete (in Stufen) Energieniveaus (Abstand der Elektronen zum Kern) aufweisen. Durch Anregung wird ein Atom in eine höheres Energieniveau gebracht. Fällt das Atom in ein tieferes Energieniveau zurück, wird die Energiedifferenz in Form eines Lichtquants (Photon der Ruhemasse Null) abgegeben.

Es gibt zwei Arten der Lichterzeugung, die sich um die Anregungsart unterscheiden.

Bei der Glühlampe werden die Atome aufgrund thermischer Energie (Stromwärme) angeregt.

Bei Gasentladungslampen (u.a. Leuchtstofflampe) erfolgt die Anregung mit Hilfe eines Stromes durch ein elektrisch leitendes Gas. Bei der Leuchtstofflampe erfolgt durch den Strom eine Abgabe von UV-Licht; welches durch die Leuchtschicht in sichtbares Licht gewandelt wird.

### 4.4.3. Turbine

Bei großen Kraftwerken erfolgt die Bereitstellung der mechanischen Energie an der Welle der Generatoren mit Hilfe von Turbinen. Je nach Kraftwerksart werden unterschiedliche Turbinen eingesetzt.

#### 4.4.4. Kraftwerke

In Kraftwerken wird die benötigte elektrische Energie zur Verfügung gestellt (umgewandelt). Je nach Primärenergie unterscheidet man verschiedene Kraftwerkstypen. Bei den meisten Kraftwerksarten wird die Primärenergie erst in verschiedene andere Energieformen gewandelt, bevor in elektrische Energie gewandelt wird.

Bei **fossil befeuerten Wärmekraftwerken** wird die chemische Energie der Kohle oder des Gases über mehrere Energiewandlungen in elektrische Energie umgewandelt.

In **Kernkraftwerken** werden Uran oder Plutonium mit Massenzahlen über 200 in kleinere Elemente mit größerem Massendefekt aufgespalten.

In **Wasserkraftwerken** wird die potentielle Energie des Wassers in elektrische Energie gewandelt.

In **Windkraftwerken** wird die kinetische Energie der Luftströmung in elektrische Energie gewandelt.

In **Solarkraftwerken** wird die elektromagnetische Strahlung der Sonne in elektrische Energie gewandelt.

### 4.4.5. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.4

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen trifft zu für :					
AF.4.4.A	W - Die direkte Wirkung des elektrischen Stromes kann sein.				
	E - Elektrische Energie kann direkt gewandelt werden in folgende Energiearten				
	D - Direkt lässt sich untere Energie wandeln in elektrische Energie				
	U - Ursache der Ladungstrennung kann sein eine	U	D	E	W
	* chemische	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Kernenergie	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wärme	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* kinetische	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Druck	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Magnetismus, Lorentzkraft	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

<b>Frage 4.4.A</b>	Wie nennt sich das Gerät welches Energie direkt wandelt:
	von chemischer nach elektrischer _____
	von mechanischer nach elektrischer _____
	von Wärme nach elektrischer _____
	von Druck nach elektrischer _____
	von Licht nach elektrischer _____
<b>Frage 4.4.B</b>	Wie nennt sich das Gerät welches elektrische Energie direkt wandelt in:
	chemische _____
	mechanische _____
	Wärme _____
	Druck _____
	Licht _____

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.4.4.B	Die Wärmewirkung ist gewollt:		
	* beim Transport elektrischer Energie über Leitungen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* bei Geräten zur Erwärmung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.4.4.C	Die Glühlampe wandelt die elektrische Energie direkt in:		
	* thermische	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* sichtbares Licht	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Strahlungsenergie	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.4.4.D	Die Leuchtstofflampe wandelt die elektrische Energie direkt in:		
	* thermische	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* sichtbares Licht	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Strahlungsenergie	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

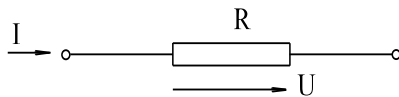
## 4.5. Elektrische Leistung

Die Leistung ist definiert als Arbeit oder Energie pro Zeit:

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}} \quad P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} (U \cdot I \cdot t) = U \cdot I$$

$$P = U \cdot I$$

### 4.5.1. Leistung an einem ohmschen Widerstand



Nach der oben abgeleitete Formel gilt für jedes Ersatzschaltbild-Element, also auch für den ohmschen Widerstand:

Bild EG451A

$$P = U \cdot I$$

Wird der Strom  $I = U/R$  durch die Spannung ersetzt, ergibt sich:

$$P = U \cdot \frac{U}{R}$$

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Das Ersetzen der Spannung  $U = R \cdot I$  durch den Strom ergibt dagegen:

$$P = R \cdot I \cdot I$$

$$P = I^2 \cdot R$$

**Verluste:** In jedem stromdurchflossenen ohmschen Widerstand (also auch jedem Leiter) tritt eine Verlustleistung auf, die bis auf Anwendungen der Elektrowärme nicht erwünscht ist.

$$P_{\text{verluste}} = I^2 \cdot R$$

#### Beispiel 1:

**gegeben:**  $P = 2 \text{ kW}$   $U = 220 \text{ V}$

**gesucht:**  $I$

**Lösungsweg:**

$$I = \frac{P}{U} = \frac{2000 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 9.091 \text{ A}$$

#### Beispiel 2:

**gegeben:**  $R = 100 \Omega$   $U = 220 \text{ V}$

**gesucht:**  $P$

**Lösungsweg:**

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(220 \text{ V})^2}{100 \Omega} = 484 \text{ W}$$

#### Beispiel 3:

**gegeben:**  $R = 10 \Omega$   $I = 20 \text{ A}$

**gesucht:**  $P$

**Lösungsweg:**

$$P = I^2 \cdot R = (20 \text{ A})^2 \cdot 10 \Omega = 4 \text{ kW}$$

#### Beispiel 4:

**gegeben:**  $R = 60 \Omega$   $P = 2 \text{ kW}$

**gesucht:**  $U$  und  $I$

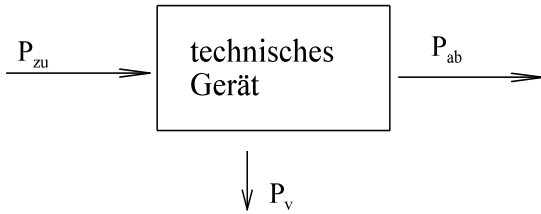
**Lösungsweg:**

$$U = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{2000 \text{ W} \cdot 60 \Omega} = 346.4 \text{ V} \quad I = \frac{U}{R} = \frac{346.4 \text{ V}}{60 \Omega} = 5.773 \text{ A}$$

### 4.5.2. Leistungsbilanz und Wirkungsgrad

**Allgemein:**

Einem Gerät wird eine Leistung  $P_{zu}$  zugeführt. Im Gerät entsteht eine Verlustleistung  $P_v$ . Übrig bleibt die Nutzleistung  $P_{ab}$  die abgegeben wird, siehe Bild EG452A. Diese Aussage gilt allgemein und ist nicht nur auf elektrische Geräte bezogen.



Der Wirkungsgrad ist definiert als das Verhältnis von abgegebener Leistung zu zugeführter Leistung und wird manchmal auch in % angegeben:

Bild EG452A

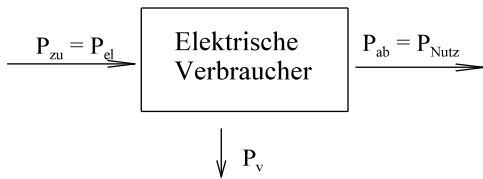
$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = 100\% \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

Leistungsbilanz:

$$P_{zu} = P_v + P_{ab}$$

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_v} = \frac{P_{zu} - P_v}{P_{zu}} = 1 - \frac{P_v}{P_{zu}}$$

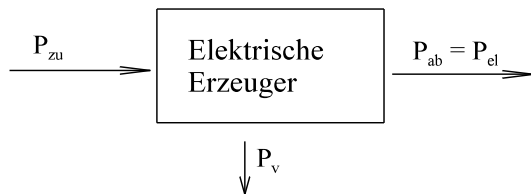
**Elektrische Verbraucher**



$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P_{Nutz}}{P_{el}}$$

Bild EG452B

**Elektrische Erzeuger** (physikalisch richtig: Wandler in elektrische Energie)



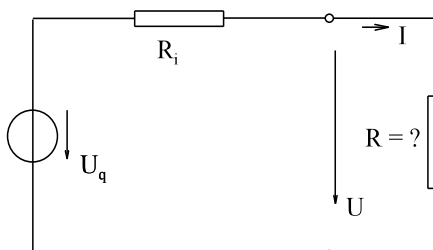
$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P_{el}}{P_{zu}}$$

Bild EG452C

**Größe des Wirkungsgrades**

Energietechnik: etwas kleiner als 1  
 Nachrichtentechnik: uninteressant

### 4.5.3. Leistungsanpassung



Gesucht ist derjenige Widerstand R nach Bild EG453A, an dem die größte Leistung auftritt.

Bild EG453A

**Methode 1: P = f(R) berechnen**

$$P = I^2 * R = \left( \frac{U_q}{R_i + R} \right)^2 * R$$

$$P = U_q^2 \frac{R}{(R_i + R)^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = U_q^2 \frac{(R_i + R)^2 * 1 - R * 2 * (R_i + R)}{(R_i + R)^4} = U_q^2 \frac{R_i^2 + 2RR_i + R^2 - 2RR_i - 2R^2}{(R_i + R)^4} = U_q^2 \frac{R_i^2 - R^2}{(R_i + R)^3}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_i^2 - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_i^2 = R^2$$

$$R_i = R$$

**Leistungsanpassung tritt auf, wenn der Belastungswiderstand gleich dem Innenwiderstand der Quelle ist.**

$$P_{\max} = \frac{U_q^2}{4R_i}$$

**Methode 2: P = f(U) berechnen**

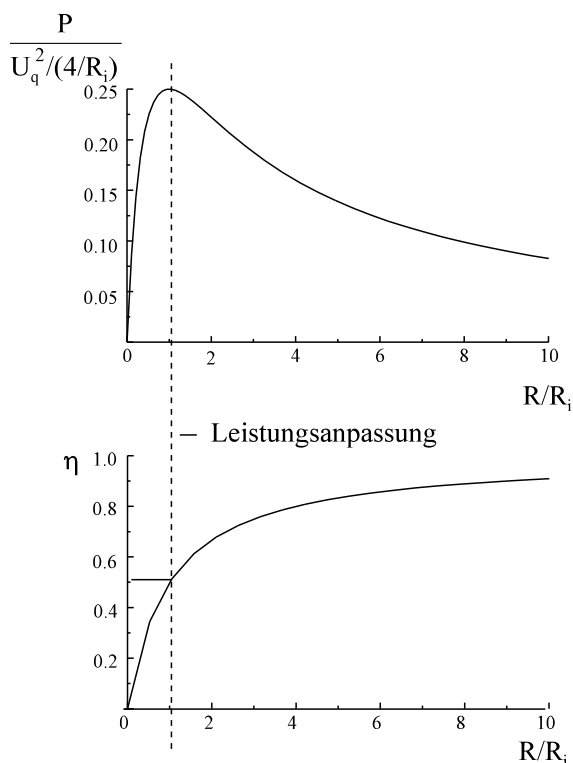
$$P = U * I$$

$$P = U * \frac{U_q - U}{R_i} = \frac{1}{R_i} * (U_q * U - U^2)$$

$$\frac{dP}{dU} = \frac{1}{R_i} (U_q - 2U)$$

$$\frac{dP}{dU} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_q - 2U = 0 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{U_q}{2}$$

aus Spannungsteiler

 $\Rightarrow$  $R = R_i$ 

Wirkungsgrad der Schaltung nach Bild EG453A:

$$\eta = \frac{P_R}{P_q} = \frac{I^2 * R}{I^2 * R + I^2 * R_i} = \frac{R}{R + R_i}$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R}}$$

Aus dem Bild EG453B ist der Zusammenhang zwischen Leistung, Wirkungsgrad und Widerstandsverhältnis zu kennen. Bei Leistungsanpassung ist der Wirkungsgrad 50 %. Diese Methode ist für die Energietechnik nicht geeignet.

Bild EG453B

**Problematik:** In einem Netzwerk soll die Leistung an einem Widerstand maximiert werden.

**Lösung:** Durch Netzwerkumformungen oder nach dem Prinzip der Ersatzspannungsquelle wird das Restnetzwerk durch Spannungsquelle mit Innenwiderstand dargestellt. Danach ist nach der Methode die Leistungsanpassung möglich.

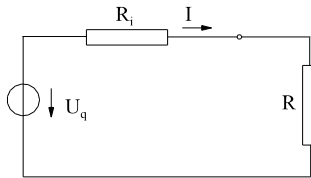
**Beispiel 1:** Eine Batterie mit einer Leerlaufspannung von 12 V und einem Innenwiderstand von  $R_i = 1 \Omega$  wird mit einem Widerstand  $R = 5 \Omega$  belastet.

- a) Wie groß sind der Strom  $I$ , die Spannung  $U_R$ , die Leistung  $P$  im Widerstand, die Verluste  $P_v$  in der Spannungsquelle und der Wirkungsgrad  $\eta$ .  
 b) Der Wirkungsgrad soll größer als 90% sein. Welchen Bereich darf der Widerstand  $R$  haben.  
 c) Nun soll die Quelle die maximale Leistung abgeben. Bei welchem Widerstandswert  $R$  ist dieses der Fall. Wie groß sind dann die Leistung  $P$  die Verluste in der Quelle  $P_v$  und der Wirkungsgrad  $\eta$ .

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $U_q = 12 \text{ V}$   
 $R_i = 1 \Omega$   
 $R = 5 \Omega$

a) **gesucht:**  $I, U_R, P, P_v, \eta$   
 ESB



$$I = \frac{U_q}{R_i + R} = \frac{12 \text{ V}}{1 \Omega + 5 \Omega} = 2 \text{ A}$$

$$U_R = I \cdot R = 2 \text{ A} \cdot 5 \Omega = 10 \text{ V}$$

$$P_v = I^2 \cdot R_i = (2 \text{ A})^2 \cdot 1 \Omega = 4 \text{ W}$$

$$P = I^2 \cdot R = (2 \text{ A})^2 \cdot 5 \Omega = 20 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{P}{P_v + P} = \frac{20 \text{ W}}{4 \text{ W} + 20 \text{ W}} = 0.833$$

b) **gegeben:**  $\eta > 90 \%$  **gesucht:**  $R$

$$\eta = \frac{P}{P_v + P} = \frac{I^2 \cdot R}{I^2 \cdot R_i + I^2 \cdot R} = \frac{R}{R_i + R} > 0.9$$

$$R > 0.9 \cdot (R_i + R)$$

$$R > 0.9 \cdot R_i + 0.9 \cdot R$$

$$0.1 \cdot R > 0.9 \cdot R_i$$

$$R > 9 \cdot R_i$$

$$R > 9 \cdot R_i = 9 \cdot 1 \Omega = 9 \Omega$$

c) Leistungsanpassung

$$R = R_i = 1 \Omega$$

$$I = \frac{U_q}{2 \cdot R_i} = \frac{12 \text{ V}}{2 \cdot 1 \Omega} = 6 \text{ A}$$

$$U_R = 6 \text{ V}$$

$$P = U_R \cdot I = 6 \text{ A} \cdot 6 \text{ V} = 36 \text{ W}$$

$$P_v = P = 36 \text{ W}$$

$$\eta = 0.5$$

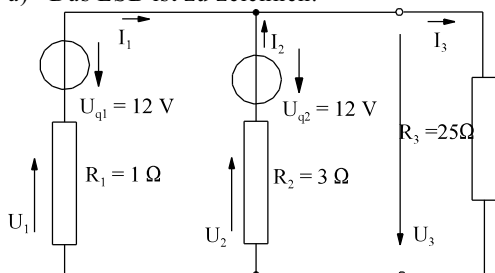
**Beispiel 2:** Ein Verbraucher  $R_3 = 25 \Omega$  wird über zwei parallel geschaltete Spannungsquellen versorgt. Die

Daten der Spannungsquellen:  $U_{q1} = 12 \text{ V}$   $R_1 = 1 \Omega$   
 $U_{q2} = 12 \text{ V}$   $R_2 = 3 \Omega$

- Das ESB ist zu zeichnen.
- Man bestimme alle Ströme und Spannungen.
- Welche Leistungen geben die Quellen 1 und 2 ab und welche Leistung wird im Widerstand umgesetzt?
- Wie groß sind die Verlustleistungen der Quellen 1 und 2?
- Die Einzelwirkungsgrade der Quellen  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  und der Gesamtwirkungsgrad  $\eta$  sind zu bestimmen.
- Bei welchem Widerstand  $R_3$  erfolgt die maximale Leistungsaufnahme in  $R_3$ . Wie groß ist dann diese Leistungsaufnahme.

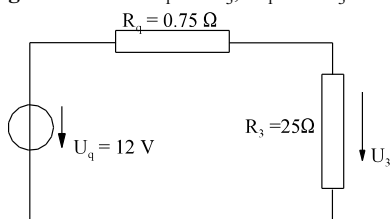
**Lösungsweg:**

- a) Das ESB ist zu zeichnen.



- b) Man bestimme alle Ströme und Spannungen

**gesucht:**  $I_1$  bis  $I_3$ ,  $U_1$  bis  $U_3$



Methode: Ersatzquelle

$$U_q^* = 12 \text{ V}$$

$$R_q^* = R_1 \parallel R_2 = 0.75 \Omega$$

$$U_3 = U_q^* \cdot \frac{R_3}{R_q^* + R_3} = 12 \text{ V} \cdot \frac{25 \Omega}{0.75 \Omega + 25 \Omega} = 11.65 \text{ V}$$

$$U_1 = U_2 = U_{q1} - U_3 = U_{q2} - U_3 = 12 \text{ V} - 11.65 \text{ V} = 0.35 \text{ V} \quad (\text{Fehlerbetrachtung !!!!})$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{0.35 \text{ V}}{1 \Omega} = 0.35 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{0.35 \text{ V}}{3 \Omega} = 0.117 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{11.65 \text{ V}}{25 \Omega} = 0.466 \text{ A}$$

- c) Welche Leistungen geben die Quellen 1 und 2 ab und welche Leistung wird im Widerstand umgesetzt

$$P_{q1} = U_{q1} \cdot I_1 = 12 \text{ V} \cdot 0.35 \text{ A} = 4.2 \text{ W}$$

$$P_{q2} = U_{q2} \cdot I_2 = 12 \text{ V} \cdot 0.117 \text{ A} = 1.40 \text{ W}$$

$$P_3 = U_3 \cdot I_3 = 11.65 \text{ V} \cdot 0.466 \text{ A} = 5.43 \text{ W}$$

- d) Wie groß sind die Verlustleistungen der Quellen 1 und 2?

$$P_{v1} = I_1 \cdot U_1 = 0.35 \text{ A} \cdot 0.35 \text{ V} = 0.123 \text{ W} \quad P_{v2} = I_2 \cdot U_2 = 0.117 \text{ A} \cdot 0.35 \text{ V} = 0.041 \text{ W}$$

- e) Die Einzelwirkungsgrade der Quellen  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  und der Gesamtwirkungsgrad  $\eta$  sind zu bestimmen.

$$\eta_1 = \frac{P_{q1} - P_{v1}}{P_{q1}} = \frac{4.2 \text{ W} - 0.123 \text{ W}}{4.2 \text{ W}} = 0.971 \quad \eta_2 = \frac{P_{q2} - P_{v2}}{P_{q2}} = \frac{1.4 \text{ W} - 0.041 \text{ W}}{1.4 \text{ W}} = 0.971$$

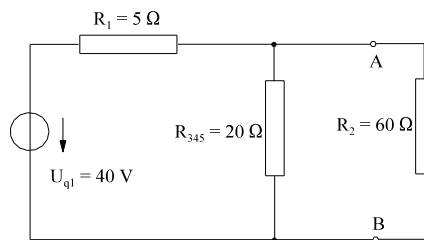
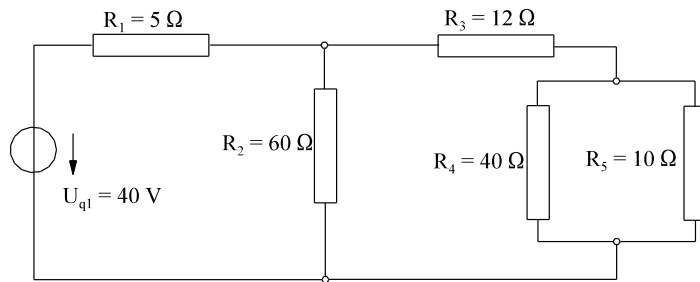
$$\eta = \frac{P_{q1} + P_{q2} - P_{v1} - P_{v2}}{P_{q1} + P_{q2}} = \frac{4.2 \text{ W} + 1.4 \text{ W} - 0.123 \text{ W} - 0.041 \text{ W}}{4.2 \text{ W} + 1.4 \text{ W}} = 0.971$$

- f) Bei welchem Widerstand  $R_3$  erfolgt die maximale Leistungsaufnahme in  $R_3$ . Wie groß ist dann diese Leistungsaufnahme.

laut ESB in b  $R_3 = 0.75 \Omega$   $P_{3\max} = \frac{(12 \text{ V})^2}{4 \cdot 0.75 \Omega} = 48 \text{ W}$



**Beispiel 3:** Beim Netzwerk 3C soll der Widerstand  $R_2$  so variiert werden, so dass die Leistung an  $R_2$  maximal wird.



$$R_{345} = R_3 + R_4 \parallel R_5 = 12 \Omega + \frac{40 \Omega \cdot 10 \Omega}{40 \Omega + 10 \Omega} = 20 \Omega$$

An den Klemmen A und B kann das Restnetzwerk nach der Methode Ersatzspannungsquelle ersetzt werden.

**Leerlaufspannung:** 
$$U_q^* = U_{q1} \cdot \frac{R_{345}}{R_{345} + R_1} = 40 \text{ V} \cdot \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 5 \Omega} = 32 \text{ V}$$

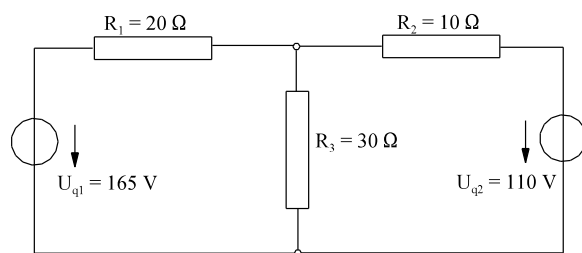
**Innenwiderstand:** 
$$R_q^* = R_1 \parallel R_{345} = 5 \Omega \parallel 20 \Omega = \frac{5 \Omega \cdot 20 \Omega}{5 \Omega + 20 \Omega} = 4 \Omega$$

Nach der Methode Leistungsanpassung ergibt sich

$$R = R_q^* = 4 \Omega$$

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \frac{U_q^{*2}}{R_q^*} = \frac{1}{4} \frac{(32 \text{ V})^2}{4 \Omega} = 64 \text{ W}$$

**Beispiel 4:**



Bestimmen Sie den Widerstand  $R_3$  des Netzwerkes 3E, damit die Leistung an  $R_3$  maximal wird. Wie groß ist die maximale Leistung  $P_{\max}$ .

**Lösungsweg:**

Ersatzquelle an  $R_3$

$$I_q^* = \frac{U_{q1}}{R_1} + \frac{U_{q2}}{R_2} = \frac{165 \text{ V}}{20 \Omega} + \frac{110 \text{ V}}{10 \Omega} = 19.25 \text{ A}$$

$$R_q^* = R_1 \parallel R_2 = \frac{20 \Omega \cdot 10 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega} = 6.667 \Omega$$

$$U_q^* = R_q^* \cdot I_q^* = 6.667 \Omega \cdot 19.25 \text{ A} = 128.3 \text{ V}$$

$$R_3 = R_q^* = 6.667 \Omega$$

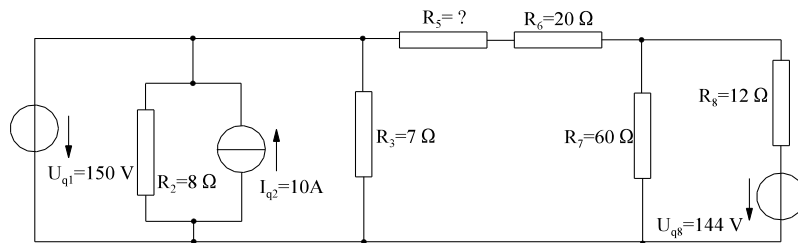
(wegen Leistungsanpassung)

$$P_{\max} = \frac{(U_q^*/2)^2}{R_3} = \frac{(128.3 \text{ V})^2}{4 \cdot 6.667 \Omega} = 617 \text{ W}$$

**Prinzip:**

Bei der Leistungsanpassung sind oftmals mehrere Netzberechnungsmethoden zu kombinieren. Beim nächsten Beispiel 5 sind dies

- Vernachlässigung des Restnetzwerkes bei idealen Spannungsquellen (Verständnis)
- Ersatzquelle
- Netzwerksumformung

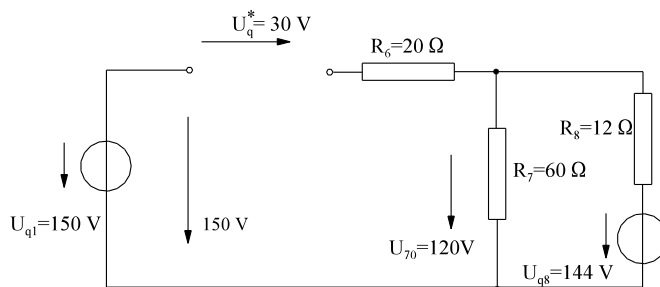
**Beispiel 5:** (Aufgabe 7, Klausur 15.01.2001)

- a) Bestimmen Sie den Widerstand  $R_5$ , damit die Leistung an  $R_5$  maximal wird.
- b) Berechnen Sie die maximale Leistung an  $R_5$ .

Hinweis: Die Aufgabe sieht kompliziert aus, ist aber leichter zu lösen. !!! Vorher überlegen !!!

**Lösungsweg:**

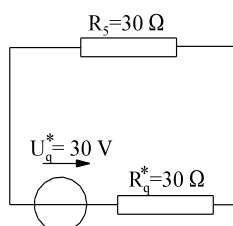
Methode: Restwerk parallel zu idealer Spannungsquelle vernachlässigen: Die Elemente parallel  $U_{q1}$ ,  $R_2$ ,  $I_{q2}$  und  $R_3$  der Aufgabenstellung können unberücksichtigt bleiben.



$$R_q^* = R_6 + R_7 \parallel R_8 = 20 \Omega + \frac{60 \Omega \cdot 12 \Omega}{60 \Omega + 12 \Omega} = 30 \Omega$$

$$U_{70} = U_{q8} \cdot \frac{R_7}{R_7 + R_8} = 144 \text{ V} \cdot \frac{60 \Omega}{60 \Omega + 12 \Omega} = 120 \text{ V}$$

$$U_q^* = U_{q1} - U_{70} = 150 \text{ V} - 120 \text{ V} = 30 \text{ V}$$

**Leistungsanpassung:**

$$R_s = R_q^* = 30 \Omega$$

$$P_{\max} = \left( \frac{U_q^*}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{R_q^*} = \left( \frac{30 \text{ V}}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{30 \Omega} = 7.5 \text{ W}$$

### 4.5.4. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.5

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.4.5.A</b>	Leistung ist definiert als: * Arbeit mal Zeit * Arbeit pro Zeit * Zeit pro Arbeit	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.4.5.B</b>	Der Wirkungsgrad ist allgemein definiert als das Verhältnis von: * zugeführter Leistung zu abgegebener Leistung * abgegebener Leistung zu zugeführter Leistung * mechanischer Leistung zu elektrischer Leistung * elektrischer Leistung zu mechanischer Leistung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.4.5.C</b>	Der Wirkungsgrad * kann größer 1 sein * ist größer 1 * ist immer kleiner gleich 1 * ist immer positiv * kann auch negativ sein	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.4.5.D</b>	Ein guter Wirkungsgrad bedeutet: * $\eta$ etwas kleiner 1 * $\eta$ viel kleiner 1 * $\eta$ positiv * $\eta$ etwas kleiner 100 % * $\eta$ größer 1	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.4.5.E</b>	Ein guter Wirkungsgrad ist besonders wichtig in der * Energietechnik * Nachrichtentechnik	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.4.5.F</b>	Leistungsanpassung an einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand bedeutet: * Belastungswiderstand gleich Innenwiderstand * Belastungswiderstand kleiner Innenwiderstand * Belastungswiderstand größer Innenwiderstand	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.4.5.G</b>	Bei umfangreichen Netzwerken und Leistungsanpassung wird i.A. das Netz berechnet nach der Methode: * Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze * Maschenstrom-Verfahren * Überlagerungsprinzip * Ersatzquelle * Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

<b>Frage 4.5.A</b>	Leistung ist definiert als _____
<b>Frage 4.5.B</b>	Gegeben Sie drei Formeln zur Berechnung der elektrischen Leistung eines Widerstand an:  $P(U, I) =$ _____ $P(I, R) =$ _____ $P(U, R) =$ _____
<b>Frage 4.5.C</b>	Der Wirkungsgrad ist allgemein definiert als: _____
<b>Frage 4.5.D</b>	Bei einem elektrischen Verbraucher ist der Wirkungsgrad definiert als: _____
<b>Frage 4.5.E</b>	Bei einem Wandler in elektrische Energie ist der Wirkungsgrad definiert als: _____
<b>Frage 4.5.F</b>	Der Wirkungsgrad bei Leistungsanpassung beträgt: _____

**Frage 4.5.G** Geben Sie den Bereich des Wirkungsgrad an

$$\text{-----} \leq \eta \leq \text{-----}$$

**Frage 4.5.H** Leistungsanpassung bei umfangreichen Netzwerken wird i. A. durchgeführt nach der Netzbe-  
rechnungsmethode:

-----

**Aufgabe 4.5.A:**

- |    |                     |                     |                 |
|----|---------------------|---------------------|-----------------|
| a) | $P = 200 \text{ W}$ | $U = 100 \text{ V}$ | $I = ?$         |
| b) | $R = 20 \Omega$     | $U = 100 \text{ V}$ | $P = ?$         |
| c) | $R = 40 \Omega$     | $I = 15 \text{ A}$  | $P = ?$         |
| d) | $R = 90 \Omega$     | $P = 300 \text{ W}$ | $U = ?$ $I = ?$ |

**Aufgabe 4.5.B:**

Eine Batterie mit einer Leerlaufspannung von 10 V und einem Innenwiderstand von  $R_i = 2 \Omega$  wird mit einem Widerstand  $R = 3 \Omega$  belastet.

- Wie groß sind der Strom  $I$ , die Spannung  $U_R$ , die Leistung  $P$  im Widerstand, die Verluste  $P_v$  in der Spannungsquelle und der Wirkungsgrad  $\eta$ .
- Der Wirkungsgrad soll größer als 80% sein. Welchen Bereich darf der Widerstand  $R$  haben.
- Nun soll die Quelle die maximale Leistung abgeben. Bei welchem Widerstandswert  $R$  ist dieses der Fall. Wie groß ist dann die Leistung  $P$  die Verluste in der Quelle  $P_v$  und der Wirkungsgrad  $\eta$ .

**Aufgabe 4.5.C:**

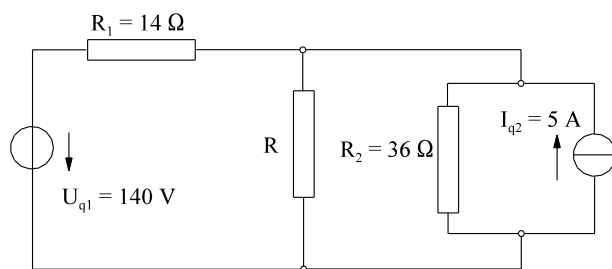
Ein Verbraucher  $R_3 = 10.8 \Omega$  wird über zwei parallel geschaltete Spannungsquellen versorgt. Die Daten der Spannungsquellen:

$$\begin{array}{ll} U_{q1} = 10 \text{ V} & R_1 = 2 \Omega \\ U_{q2} = 12 \text{ V} & R_2 = 3 \Omega \end{array}$$

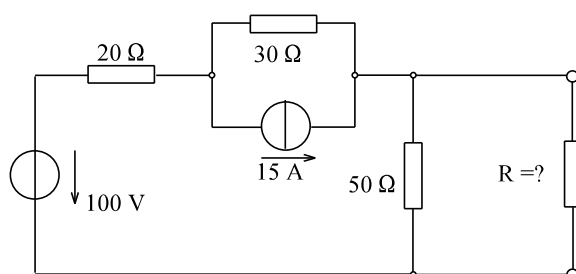
- Das ESB ist zu zeichnen.
- Man bestimme alle Ströme und Spannungen.
- Welche Leistungen geben die Quellen 1 und 2 ab und welche Leistung wird im Widerstand umgesetzt.
- Wie groß sind die Verlustleistungen der Quellen 1 und 2.
- Die Einzelwirkungsgrade der Quellen  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  und der Gesamtwirkungsgrad  $\eta$  sind zu bestimmen.
- Bei welchem Widerstand  $R_3$  erfolgt die maximale Leistungsaufnahme in  $R_3$ . Wie groß ist dann diese Leistungsaufnahme.

**Aufgabe 4.5.D:**

Bestimmen Sie den Widerstand  $R$  des Netzwerk 3I, damit die Leistung an  $R$  maximal wird. Wie groß ist die maximal Leistung  $P_{\max}$ ?



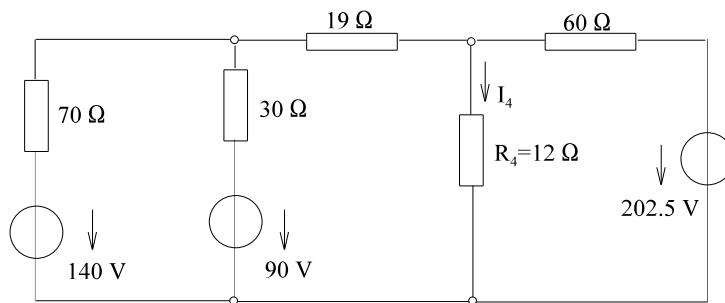
**Aufgabe 4.5.E:**



Bestimmen Sie den Widerstand  $R$  damit die Leistung an  $R$  maximal wird. Wie groß ist die maximale Leistung  $P_{\max}$ ?

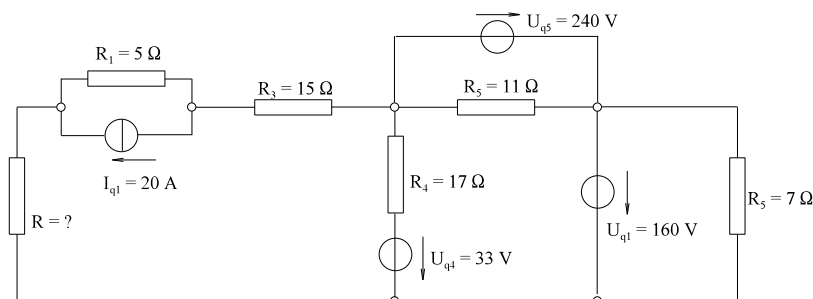
**Aufgabe 4.5.F:** (Aufgabe 3, Klausur 26.01.96)

**Hinweis:** Bevor der Aufgabenteil a) gelöst wird, sollte die Lösungsstrategie für den Aufgabenteil b) gewählt werden.



Gegeben ist das untere Netzwerk

- Bestimmen Sie den Strom  $I_4$ .
- Der Widerstand  $R_4$  soll nun so gewählt werden, dass an  $R_4$  die maximale Leistung auftritt. Wie groß sind  $R_4$  und die maximale Leistung  $P_4$ ?

**Aufgabe 4.5.G:** (Aufgabe 6, Klausur 13.01.99)

- Bestimmen Sie den Widerstand  $R$ , damit die Leistung an  $R$  maximal wird.
- Berechnen Sie die maximale Leistung an  $R$ .

**Hinweis:** Die Aufgabe sieht kompliziert aus, ist aber leicht zu lösen. !!! Vorher überlegen !!

## 4.6. Elektrisches Erwärmen

Wiederholung aus Abschnitt 4.3.5 und 4.3.6

- $W_{\text{therm}}$  - Wärmemenge zum Aufheizen
- $W_{\text{schm}}$  - Schmelzwärme
- $W_{\text{verd}}$  - Verdampfungswärme

$$W_{\text{therm}} = m \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

$$W_{\text{schm}} = q \cdot m$$

$$W_{\text{verd}} = r \cdot m$$

Ein Teil der elektrischen Energie

$$W_{\text{el}} = P \cdot t$$

geht auf den zu erwärmenden Körper über, der andere an die Umgebung. Der Nutzanteil ist mit dem Wirkungsgrad verknüpft:

$$W_{\text{therm}} = \eta \cdot W_{\text{el}}$$

Das Gleichsetzen von elektrischen Nutzanteil und thermischer Energie ergibt die Erwärmungsformeln für Gleichstrom:

$m \cdot c \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) = \eta \cdot P \cdot t$
$q \cdot m = \eta \cdot P \cdot t$
$r \cdot m = \eta \cdot P \cdot t$

## 4.6.1. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 4.6

**Beispiel 1:**

Eine Kochplatte für einen Elektroherd soll mit Hilfe einer Heizwendel aus Konstantan hergestellt werden. Die Herdplatte soll an einer Spannung von  $U = 230 \text{ V}$  eine Leistung von  $P = 2000 \text{ W}$  aufnehmen. Der Wendeldurchmesser beträgt  $d_w = 5 \text{ mm}$  bei einer Wendelsteigung von  $a = 2 \text{ mm}$ . Der Durchmesser des Drahtes ist  $d_{Ko} = 0.2 \text{ mm}$ .

$$\kappa_{Ko} = 2 \cdot 10^6 \text{ 1}/(\Omega\text{m})$$

$$\alpha_{Ko} = 0.04 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

a) Wie lang muss die Wendel  $l_{we}$  für  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$  ausgeführt werden.

b) Man bestimme die Länge der Wendel  $l_{we}^*$  für  $\vartheta = 100^\circ\text{C}$ .

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $U = 230 \text{ V}$   $P = 2000 \text{ W}$   $d_w = 5 \text{ mma} = 2 \text{ mm}$   
 $d_{Ko} = 0.2 \text{ mm}$   $\kappa_{Ko} = 2 \cdot 10^6 \text{ 1}/(\Omega\text{m})$   $\alpha_{Ko} = 0.04 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

a) Wie lang muss die Wendel  $l_{we}$  für  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$  ausgeführt werden.

**gesucht:**  $l_{we}$  für  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

$$l_{\text{Draht}} = N \cdot U \quad U = \pi \cdot d_w \quad N = \frac{l_{we}}{a}$$

$$l_{\text{Draht}} = \frac{l_{we} \cdot \pi \cdot d_w}{a} \quad P = \frac{U^2}{R} \quad R = \frac{U^2}{P}$$

$$R = \frac{l_{\text{Draht}}}{\kappa \cdot A} = \frac{l_{\text{Draht}} \cdot 4}{\kappa \cdot \pi \cdot d_{Ko}^2} \quad A = \frac{\pi \cdot d_{Ko}^2}{4}$$

$$R = \frac{l_w \cdot \pi \cdot d_w}{a} \cdot \frac{4}{\kappa \cdot \pi \cdot d_{Ko}^2} = \frac{U^2}{P}$$

$$l_w = \frac{U^2 \cdot a \cdot \kappa \cdot d_{Ko}^2}{d_w \cdot 4 \cdot P} = \frac{(230 \text{ V})^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}} \cdot (0.2 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2}{(5 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot 4 \cdot 2000 \text{ VA}} = 21.16 \text{ cm}$$

b) Man bestimme die Länge der Wendel  $l_{we}^*$  für  $\vartheta = 100^\circ\text{C}$ .

**gesucht:**  $l_{we}^*$  für  $\vartheta = 100^\circ\text{C}$

$$R^* = R$$

$$\frac{\rho^* \cdot l^*}{A^*} = \frac{\rho \cdot l}{A} \quad A = A^*$$

$$l^* = l \cdot \frac{\rho}{\rho^*}$$

$$\rho^* = \rho[1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta]$$

$$l^* = l \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta} = 21.16 \text{ cm} \cdot \frac{1}{1 + 0.04 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot 80 \text{ K}} = \frac{21.16 \text{ cm}}{1.003} = 21.10 \text{ cm}$$

=> geringer Temperatureinfluss

**Beispiel 2:**

Wie lange benötigt man, unter der Annahme, dass eine Kochplatte einen Wirkungsgrad von  $\eta = 70\%$  hat und eine Leistung  $P = 1400 \text{ W}$  aufnimmt, 3 l Wasser von  $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$  auf  $\vartheta_2 = 100^\circ\text{C}$  zu erwärmen ( $c_{\text{Wasser}} = 4187 \text{ Ws kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ).

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $\eta = 0.7$   $P = 1400 \text{ W}$   $m = 3 \text{ l } \vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$   
 $\vartheta_2 = 100^\circ\text{C}$   $c_{\text{Wasser}} = 4187 \text{ Ws kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

**gesucht:**  $t$

$$W_{\text{th}} = W_{\text{el}} \cdot \eta \quad W_{\text{th}} = m \cdot c \cdot \Delta T \quad W_{\text{el}} = P \cdot t \quad m \cdot c \cdot \Delta T = P \cdot t \cdot \eta$$

$$t = \frac{m \cdot c \cdot \Delta T}{P \cdot \eta} = \frac{3 \text{ kg} \cdot 4187 \text{ Ws kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 80 \text{ K}}{1400 \text{ W} \cdot 0.7} = 1025 \text{ s} = 17.1 \text{ min}$$

**Beispiel 3:**

Wie lange dauert es bis 2 l Wasser von  $\vartheta = 100\text{ °C}$  bei einer Anschlussleistung von 2 kW und einem Wirkungsgrad von  $\eta = 90\%$  verkocht sind ( $r_{\text{Wasser}} = 2256\text{ kW s kg}^{-1}$ )

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $m = 2\text{ kg}$   $\vartheta = 100\text{ °C}$   
 $P = 2\text{ kW}$   $\eta = 0.9$   $r_{\text{Wasser}} = 2256\text{ kW s kg}^{-1}$

**gesucht:**  $t$   
 $W_{\text{th}} = W_{\text{el}} * \eta$   $W_{\text{th}} = r * m$   $W_{\text{el}} = P * t * \eta$   $r * m = P * t * \eta$

$$t = \frac{r * m}{P * \eta} = \frac{2256 * 10^3\text{ W s kg}^{-1} * 2\text{ kg}}{2000\text{ W} * 0.9} = 2507\text{ s} = 41.8\text{ min}$$

**Beispiel 4:**

Eine Kochplatte mit einer Leistungsaufnahme von  $P = 1000\text{ W}$  und einem Wirkungsgrad von  $\eta = 0.85$  erhitzt 0.5l Wasser von  $\vartheta_0 = 20\text{ °C}$ . Welche Temperatur  $\vartheta_i$  und welche Masse  $m_i$  sind nach der Zeit  $t_1 = 1\text{ min}$ ,  $t_2 = 2\text{ min}$ ,  $t_3 = 3\text{ min}$ ,  $t_4 = 4\text{ min}$ ,  $t_5 = 5\text{ min}$ ,  $t_6 = 10\text{ min}$  und  $t_7 = 20\text{ min}$  vorhanden.

( $c_{\text{Wasser}} = 4187\text{ W s kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ) ( $r_{\text{Wasser}} = 2256\text{ kW s kg}^{-1}$ )

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $P = 1000\text{ W}$   $\eta = 0.85$   $m = 0.5\text{ kg}$   $\vartheta_0 = 20\text{ °C}$   
 $t_1 = 1\text{ min}$   $t_2 = 2\text{ min}$   $t_3 = 3\text{ min}$   $t_4 = 4\text{ min}$   
 $t_5 = 5\text{ min}$   $t_6 = 10\text{ min}$   $t_7 = 20\text{ min}$   
 $c_{\text{Wasser}} = 4187\text{ W s kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$   $r_{\text{Wasser}} = 2256\text{ kW s kg}^{-1}$

**gesucht:**  $\vartheta_i$  und  $m_i$   
 $\vartheta_i = \vartheta_0 + \frac{P * \eta * t_i}{m * c} = 20\text{ °C} + \frac{1000\text{ W} * 0.85}{0.5\text{ kg} * 4187\text{ W s kg}^{-1}\text{ °C}^{-1}} * t_i$  (aus Beispiel 2 umgestellt)

$$\vartheta_i = 20\text{ °C} + 0.4060\text{ °C s}^{-1} * t_i$$

$t_1 = 60\text{ s}$   $\vartheta_1 = 44.4\text{ °C}$   $m_1 = 0.5\text{ kg}$   
 $t_2 = 120\text{ s}$   $\vartheta_2 = 67.7\text{ °C}$   $m_2 = 0.5\text{ kg}$   
 $t_3 = 180\text{ s}$   $\vartheta_3 = 93.1\text{ °C}$   $m_3 = 0.5\text{ kg}$   
 $t_4 = 240\text{ s}$   $\vartheta_4 > 100\text{ °C}$  => Verdampfung hat schon begonnen

$t_v$  wenn  $100\text{ °C}$  erreicht

$$\vartheta_v = 100\text{ °C} = 20\text{ °C} + 0.4060\text{ °C s}^{-1} * t_v$$

$$t_v = \frac{80\text{ °C}}{0.4060\text{ °C s}^{-1}} = 197.0\text{ s}$$

$$W_{\text{th}} = W_{\text{el}} * \eta \quad \Delta m * r = P * (t - t_v) * \eta \quad m = m_0 - \Delta m$$

$$m = m_0 - \frac{P * (t - t_v) * \eta}{r} = 0.5\text{ kg} - \frac{1000\text{ W} * 0.85}{2256 * 10^3\text{ W s kg}^{-1}} * (t - t_v)$$

$$m_i = 0.5\text{ kg} - 0.3768 * 10^{-3}\text{ kg s}^{-1} * (t - 197\text{ s})$$

$t_4 = 240\text{ s}$   $m_4 = 0.484\text{ kg}$   $\vartheta_4 = 100\text{ °C}$   
 $t_5 = 300\text{ s}$   $m_5 = 0.461\text{ kg}$   $\vartheta_5 = 100\text{ °C}$   
 $t_6 = 600\text{ s}$   $m_6 = 0.348\text{ kg}$   $\vartheta_6 = 100\text{ °C}$   
 $t_7 = 1200\text{ s}$   $m_7 = 0.122\text{ kg}$   $\vartheta_7 = 100\text{ °C}$

**Aufgabe 4.6.A:** Wie lange dauert es, um 60 l Wasser von  $\vartheta_1 = 15\text{ °C}$  auf  $\vartheta_2 = 95\text{ °C}$  bei einem Wirkungsgrad von  $\eta = 95\%$  aufzuheizen? Bei einer Anschlussspannung von  $U = 220\text{ V}$  beträgt die Stromstärke  $I = 10\text{ A}$ . Die Daten von Wasser sind aus entsprechenden Unterlagen zu entnehmen.

**Aufgabe 4.6.B:**

Eine Kochplatte hat eine Leistungsaufnahme von 2 kW und einen Wirkungsgrad  $\eta = 90\%$ . Zur Zeit  $t_0 = 0$  werden 10 l Wasser von  $\vartheta_0 = 20\text{ °C}$  erhitzt. Welche Temperatur  $\vartheta_1$  hat das Wasser nach  $t_1 = 5\text{ min}$ .

( $c_{\text{Wasser}} = 4187\text{ W s kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ )

**Aufgabe 4.6.C:** Eine Kochplatte mit einer Leistungsaufnahme von  $P = 2000\text{ W}$  und einem Wirkungsgrad von  $\eta = 0.95$  erhitzt 0.7 l Wasser von  $\vartheta_0 = 20\text{ °C}$ . Welche Temperatur  $\vartheta_i$  und welche Masse  $m_i$  sind nach der Zeit  $t_1 = 1\text{ min}$ ,  $t_2 = 2\text{ min}$ ,  $t_3 = 3\text{ min}$ ,  $t_4 = 4\text{ min}$ ,  $t_5 = 5\text{ min}$  und  $t_6 = 10\text{ min}$  vorhanden.

( $c_{\text{Wasser}} = 4187\text{ W s kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ) ( $r_{\text{Wasser}} = 2256\text{ kW s kg}^{-1}$ )

## 4.7. Mechanische Leistung und Energie

### Heben einer Last (Masse)

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

$$P = \frac{dW}{dt} = m \cdot g \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$P = m \cdot g \cdot v$$

### Bewegen mit der Kraft in Wegerichtung

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{dW}{dt} = d \int \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

### Beschleunigen einer Masse

$$W = \int F \cdot ds = \int m \cdot a \cdot ds = \int m \frac{dv}{dt} \cdot ds = \int m \cdot dv \frac{ds}{dt}$$

$$W = m \int v \cdot dv$$

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

### 4.7.1. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 4.7

**Beispiel 1:** Ein Gleichstrommotor mit einer Anschlussspannung von  $U = 180 \text{ V}$  soll eine Last von  $m = 2 \text{ t}$  in  $20 \text{ s}$  von  $v_1 = 10 \text{ m/s}$  auf  $v_2 = 20 \text{ m/s}$  beschleunigen. Der Motor hat einen Wirkungsgrad von  $\eta = 80\%$ .

- Wie groß ist die Differenz der kinetischen Energie.
- Die mechanische Leistung ist zu berechnen.
- Bestimmen Sie die elektrische Leistung.
- Welcher konstante Gleichstrom  $I$  wäre dazu erforderlich?
- Bestimmen Sie den Strom  $I$  in allgemeiner Form.

#### Lösungsweg:

**gegeben:**  $U = 180 \text{ V}$   $m = 2 \text{ t} = 2000 \text{ kg}$   $t = 20 \text{ s}$   $v_1 = 10 \text{ ms}^{-1}$   
 $v_2 = 20 \text{ ms}^{-1}$   $\eta = 80\% = 0.8$

$$a) \quad \Delta W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 2000 \text{ kg} \cdot \left[ (20 \text{ ms}^{-1})^2 - (10 \text{ ms}^{-1})^2 \right]$$

$$\Delta W_{\text{kin}} = 300 \cdot 10^3 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 300 \cdot 10^3 \text{ Ws}$$

$$b) \quad P_{\text{mech}} = \frac{\Delta W_{\text{kin}}}{t} = \frac{300 \cdot 10^3 \text{ Ws}}{20 \text{ s}} = 15 \cdot 10^3 \text{ W} = 15 \text{ kW}$$

$$c) \quad P_{\text{mech}} = P_{\text{el}} \cdot \eta$$

$$P_{\text{el}} = \frac{P_{\text{mech}}}{\eta} = \frac{15 \text{ Ws}}{0.8} = 18.75 \text{ kW}$$

$$d) \quad P_{\text{el}} = U \cdot I \quad I = \frac{P_{\text{el}}}{U} = \frac{18750 \text{ W}}{180 \text{ V}} = 104 \text{ A}$$

$$e) \quad \Delta W_{\text{kin}} = W_{\text{el}} \cdot \eta \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) = U \cdot I \cdot t \cdot \eta \quad I = \frac{m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{2 \cdot U \cdot t \cdot \eta}$$



**Beispiel 2:** Ein Gleichstrommotor mit einer Anschlussspannung von  $U = 400 \text{ V}$  soll eine Last von  $m = 4 \text{ t}$  mit einer Geschwindigkeit von  $v = 5 \text{ m/s}$  heben ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ). Der Motor hat einen Wirkungsgrad von  $\eta = 90\%$ .

- Welche mechanische Leistung ist erforderlich.
- Berechnen Sie die elektrische Leistung.
- Welche Stromaufnahme hat der Motor.
- Geben Sie den Motorstrom in allgemeiner Form an.

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $U = 400 \text{ V}$   $m = 4 \text{ t} = 4000 \text{ kg}$   
 $v = 5 \text{ m/s}$   $g = 10 \text{ m/s}^2$   $\eta = 90\% = 0.9$

a)  $P_{\text{mech}} = F \cdot v = m \cdot g \cdot v$

$$P_{\text{mech}} = 4000 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 200 \cdot 10^3 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} = 200 \text{ kW}$$

b)  $P_{\text{el}} = \frac{P_{\text{mech}}}{\eta} = \frac{200 \text{ kW}}{0.9} = 222 \text{ kW}$

c)  $I = \frac{P_{\text{el}}}{U} = \frac{222 \cdot 10^3 \text{ W}}{400 \text{ V}} = 555 \text{ A}$

d)  $P_{\text{mech}} = P_{\text{el}} \cdot \eta$   $m \cdot g \cdot v = U \cdot I \cdot \eta$

$$I = \frac{m \cdot g \cdot v}{U \cdot \eta}$$

#### Aufgabe 4.7.A

Ein Gleichstrommotor nimmt bei einer Spannung von  $U = 200 \text{ V}$  einen Strom von  $I = 10 \text{ A}$  auf. Der Motor hat einen Wirkungsgrad von  $\eta = 80\%$ . Mit welcher Geschwindigkeit  $v$  kann er eine Last von  $m = 100 \text{ kg}$  heben ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

- Berechnen Sie die elektrische Leistung  $P_{\text{el}}$ .
- Berechnen Sie die mechanische Leistung  $P_{\text{mech}}$ .
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit  $v$ .

#### Aufgabe 4.7.B

Ein Gleichstrommotor nimmt bei einer Spannung von  $U = 400 \text{ V}$  einen konstanten Strom von  $I = 100 \text{ A}$  auf. Der Wirkungsgrad beträgt  $\eta = 85\%$ . In welcher Zeit  $t$  beschleunigt er eine Masse von  $m = 500 \text{ kg}$  von  $v_1 = 2 \text{ m/s}$  auf  $v_2 = 8 \text{ m/s}$ ?

- Berechnen Sie die elektrische Leistung  $P_{\text{el}}$ .
- Berechnen Sie die mechanische Leistung  $P_{\text{mech}}$ .
- Berechnen Sie die erforderliche Zeit  $t$ .

## 4.8. Energieübertragung über Gleichstromleitungen

Eine elektrische Leitung nach Bild EG48A weist einen Kupferwiderstand auf. An diesem treten Verluste und Spannungsabfall auf.

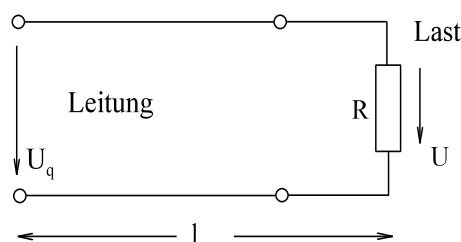


Bild EG48A

Das Strukturbild EG48A kann durch ESB Bild EG48B ersetzt werden.

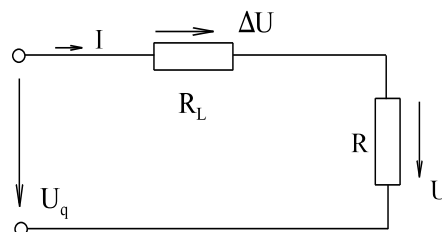


Bild EG47B

Der Leitungswiderstand  $R_L$  berechnet sich zu:

$$R_L = \frac{2 \cdot l}{\kappa \cdot A}$$

**Verhältnisse:**

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{R_L}{R}$$

$$\frac{\Delta U}{U_q} = \frac{R_L}{R_L + R}$$

$$P_V = I^2 * R_L \quad P_R = I^2 * R$$

$$\frac{P_V}{P} = \frac{I^2 * R_L}{I^2 * R} = \frac{R_L}{R}$$

$$P_q = P_V + P_R = I^2 * (R_L + R)$$

$$\frac{P_V}{P_q} = \frac{I^2 * R_L}{I^2 * (R_L + R)} = \frac{R_L}{R_L + R}$$

$$\frac{P_V}{P} = \frac{\Delta U}{U} = \frac{R_L}{R} = x$$

$$\frac{P_V}{P} = \frac{\Delta U}{U_q} = y = \frac{R_L/R}{R_L/R + 1} = \frac{x}{1+x} = y$$

Das Verhältnis von Verlustleistung zur Nutzleistung ist gleich dem Verhältnis des Spannungsabfalls der Leitung zur Verbraucherspannung und wird mit x abgekürzt. Desgleichen ist das Verhältnis von Verlustleistung zur Leistung der Quelle gleich dem Verhältnis des Spannungsabfalls der Leitung zur Spannung der Quelle und wird mit y abgekürzt.

Mit  $R = \frac{U^2}{P}$  und  $R_L = \frac{2 * l}{\kappa * A}$

kann ersetzt werden:

$$x = \frac{R_L}{R} = \frac{\frac{2 * l}{\kappa * A}}{\frac{U^2}{P}} = \frac{2 * l * P}{\kappa * A * U^2}$$

$x = \frac{\Delta U}{U} = \frac{P_V}{P} = \frac{2 * l * P}{\kappa * A * U^2}$	$y = \frac{\Delta U}{U_q} = \frac{P_V}{P_q} = \frac{R_L/R}{R_L/R + 1} = \frac{x}{1+x}$
---	--

Da der Wirkungsgrad nur etwas kleiner 1 ist, weist in der Praxis x einen Wert sehr viel kleiner 1 auf. Nach einer Näherungsberechnung ist dann x etwa gleich y:  $x \ll 1 \Rightarrow x \approx y$

**Fazit:** Der Spannungsabfall sollte möglichst gering sein, damit auch das x und y der oberen Formeln. Dieses erreicht man bei gegebener Länge und Leistung durch einen größeren Querschnitt oder durch eine höhere Übertragungsspannung. Einen größeren Querschnitt zu wählen, ist unwirtschaftlich wie auch das folgende Beispiel zeigt. Dieses ist der Grund, warum bei Drehstromnetzen die Übertragung mit hoher Spannung erfolgt. Die spezifische Leitfähigkeit  $\kappa$  kann wenig beeinflusst werden, entweder erfolgt die Übertragung über Kupferleitungen ( $\kappa^{Cu} = 56 * 10^6$  S/m) oder über Aluminiumleitungen ( $\kappa^{AL} = 36 * 10^6$  S/m).

### 4.8.1. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 4.8

<b>Beispiel 1:</b>	
<b>gegeben:</b> Cu-Leitung	=> $\kappa = 56 \frac{m}{\Omega * mm^2}$
l = 1 km = 10 <sup>3</sup> m	P = 100 kW
5 % Verluste	=> x = 0.05
U = 100 V	
<b>gesucht:</b> A	
<b>Lösungsweg:</b>	
$x = \frac{2 * l * P}{\kappa * A * U^2}$	
$A = \frac{2 * l * P}{\kappa * U^2 * x} = \frac{2 * 10^3 \text{ m} * 100 * 10^3 \text{ VA}}{56 \frac{A * m}{V * mm^2} * (100 \text{ V})^2 * 0.05} = 7143 \text{ mm}^2 = 71 \text{ cm}^2$	
=> viel zu großer Querschnitt	
=> U erhöhen, bei Gleichstrom aufwendig	

**Beispiel 2:**

Ein elektrischer Gleichstromverbraucher mit einer Nennleistung  $P_N = 2000 \text{ W}$  und einer Nennspannung  $U_N = 200 \text{ V}$  soll über eine  $l = 100 \text{ m}$  lange Cu-Leitung gespeist werden. Wie groß muss der Querschnitt der Cu-Leitung mindestens gewählt werden, damit der Spannungsabfall auf der Leitung kleiner 5% bleibt, bezogen die Spannungsquelle ( $\kappa_{\text{cu}} = 56 \text{ m}/\Omega\text{mm}^2$ ).

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $P_N = 2000 \text{ W}$        $U_N = 200 \text{ V}$   
 $l = 100 \text{ m}$        $\frac{\Delta U}{U_q} = 0.05$        $\kappa_{\text{cu}} = 56 \text{ m}/(\Omega\text{mm}^2)$

**gesucht:**  $A_{\text{min}}$ 

$$y = \frac{\Delta U}{U_q} = \frac{x}{1+x} = 0.05$$

$$x = 0.05 + 0.05x$$

$$x \cdot (1 - 0.05) = 0.05$$

$$x = \frac{0.05}{1 - 0.05} = 0.05263$$

$$x = \frac{2 \cdot l \cdot P}{\kappa \cdot A \cdot U^2}$$

$$A = \frac{2 \cdot l \cdot P}{\kappa \cdot x \cdot U^2} = \frac{2 \cdot 100 \text{ m} \cdot 2000 \text{ VA}}{56 \frac{\text{A} \cdot \text{m}}{\text{V mm}^2} \cdot 0.05263 \cdot (200 \text{ V})^2} = 3.39 \text{ mm}^2$$

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.4.8.A</b>	Die Verluste auf den Leitungen werden reduziert durch: * Erhöhung der Spannungsebene * Verringerung der Spannungsebene * Erhöhung des Stromes * Verringerung des Stromes * Erhöhung des Leitungsquerschnittes * Verringerung des Leitungsquerschnittes	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.4.8.B</b>	Das Verhältnis von Verlusten zu Nutzleistung: * ist gleich dem Verhältnis von Spannungsabfall an der Leitung zu Spannung am Verbraucher * ist ungleich dem Verhältnis von Spannungsabfall an der Leitung zu Spannung am Verbraucher * ist gleich dem Verhältnis von Spannung am Verbraucher zu Spannungsabfall an der Leitung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

**Aufgabe 4.8.A**

Ein elektrischer Gleichstromverbraucher mit einer Nennleistung  $P_N = 8000 \text{ W}$  soll über eine  $l = 500 \text{ m}$  lange Cu-Leitung mit einem Querschnitt von  $A = 96 \text{ mm}^2$  gespeist werden. Welche Übertragungsspannung sollte mindestens gewählt werden, damit die Verluste auf der Leitung kleiner als 5% betragen ( $\kappa_{\text{cu}} = 56 \text{ m}/\Omega\text{mm}^2$ ), bezogen auf die Spannungsquelle.

5. Sonderabschnitte .....	190
5.1. Leiter, Halbleiter, Isolatoren .....	190
5.1.1. Bereiche des spezifischen Widerstandes .....	190
5.1.2. Bändermodell .....	191
5.1.3. Die elektrische Leitfähigkeit .....	192
5.1.4. Halbleitung .....	193
5.1.4.1. Eigenleitung .....	193
5.1.4.2. Störstellenleitung .....	196
5.1.5. Der p-n-Übergang .....	198
5.1.6. Opto-Elektronik .....	205
5.1.7. Maximale Verlustleistung (Verlustleistungshyperbel) .....	206
5.1.8. VDR-Widerstände .....	206
5.1.9. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 5.1 .....	207
5.2. Nichtlineare Gleichstromkreise .....	211
5.2.1. Grafische Methode .....	211
5.2.2. Grafische Reihenschaltung .....	213
5.2.3. Grafische Parallelschaltung .....	214
5.2.4. Polynom-Annäherung .....	215
5.2.5. Linearisierung im Arbeitspunkt .....	216
5.2.6. Lineare Ersatzschaltung .....	218
5.2.7. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 5.2 .....	220
5.3. Thermoelektrische Erscheinungen .....	237
5.3.1. Temperaturabhängigkeit des Widerstandes .....	237
5.3.1.1. Metalle und Halbleiter .....	237
5.3.1.2. NTC und PTC Widerstände .....	240
5.3.1.3. Temperaturkompensation .....	241
5.3.2. Übergang zwischen zwei Materialien .....	245
5.3.2.1. Seebeck-Effekt, Thermoelement .....	245
5.3.2.2. Peltier-Effekt .....	247
5.4. Elektrochemische Vorgänge .....	250
5.4.1. Elektrolyt .....	250
5.4.2. Elektrolyse und Stromleitung .....	251
5.4.3. Elektrochemische Spannungserzeugung .....	253
5.4.3.1. Galvanische Elemente .....	257
5.4.3.2. Akkumulator .....	258
5.4.4. Frage und Aufgaben zu Abschnitt 5.4 .....	260

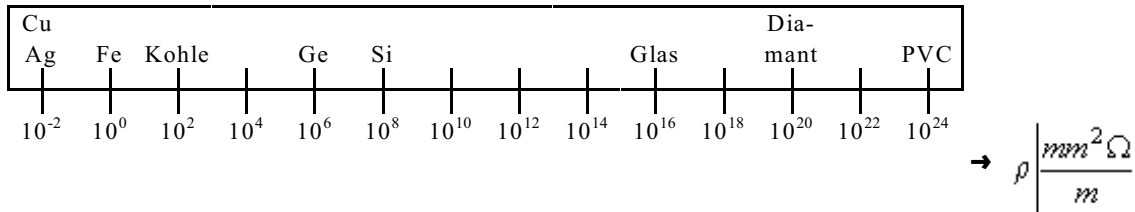
## 5. Sonderabschnitte

### 5.1. Leiter, Halbleiter, Isolatoren

#### 5.1.1. Bereiche des spezifischen Widerstandes

Leiter, Halbleiter und Isolatoren unterscheiden sich bei Raumtemperatur in der Größe des spezifischen Widerstandes  $\rho$ , siehe Bild EG511A.

Leiter	- kleiner spezifischer Widerstand	- hohe Leitfähigkeit
Halbleiter	- mittlerer spezifischer Widerstand	- mittlere Leitfähigkeit
Isolatoren	- hoher spezifischer Widerstand	- kleine Leitfähigkeit



#### Beispiel:

<b>gegeben:</b>	$l = 1 \text{ m}$	$A = 1 \text{ mm}^2$
	$\rho_{\text{Leiter}} = 0.1 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{Leiter}} = 0.1 \text{ V}$
	$\rho_{\text{HL}} = 10^8 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{HL}} = 100 \text{ V}$
	$\rho_{\text{iso1}} = 10^{16} \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{iso}} = 100 \text{ kV}$
	$\rho_{\text{iso2}} = 10^{24} \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	

**gesucht:** m- Anzahl der Elektronen pro Zeiteinheit  $[m] = \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$

#### Lösungsweg:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U \cdot A}{\rho \cdot l} = \frac{Q}{t} = q \cdot m$$

$$\frac{U \cdot A}{\rho \cdot l} = q \cdot m$$

$$m = \frac{U \cdot A}{\rho \cdot l \cdot q}$$

$$m_{\text{Leiter}} = \frac{0.1 \text{ V} \cdot 1 \text{ mm}^2}{0.1 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}$$

$$m_{\text{Leiter}} = 6 \cdot 10^{18} \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

$$m_{\text{HL}} = 6 \cdot 10^{12} \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

$$m_{\text{iso1}} = 60 \cdot 10^6 \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

$$m_{\text{iso2}} = 0.6 \frac{\text{Elektronen}}{\text{s}}$$

Obwohl die Spannungen an Leiter, Halbleiter und Isolatoren unterschiedlich sind, stellen sich erhebliche unterschiedliche Ströme (Anzahl der Elektronen) ein. Bei der höheren Spannung stellt sich aufgrund der niedrigen Leitfähigkeit der kleinste Strom ein.

### 5.1.2. Bändermodell

In diesem Abschnitt soll versucht werden, das im letzten Abschnitt festgestellte unterschiedliche Leitfähigkeitsverhalten zu erklären. Dazu werden die Energiezustände der Atome (und Moleküle) untersucht.

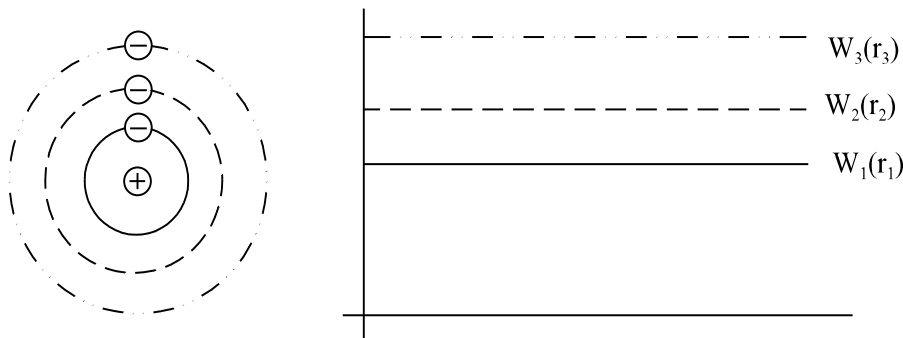


Bild EG512A: Diskrete Atombahnen und Energie des Einzelatoms

Die Elektronen der Einzelatome können nur gewisse Radien und damit auch nur gewisse Energieniveaus annehmen (Physik). Trägt man die Energie in einem Diagramm auf, wird dieses durch diskrete (einzelne) Energieniveaus dargestellt, siehe Bild EG512A.

#### Mechanischer Vergleich:

1 Pendel	→	1 Frequenz
2 gleiche Pendel, nicht gekoppelt	→	1 gleiche Frequenz
2 gleiche Pendel, gekoppelt	→	2 ungleiche Frequenzen
3 gleiche Pendel, gekoppelt	→	3 ungleiche Frequenzen
n gleiche Pendel, gekoppelt	→	n ungleiche Frequenzen

Auch bei Atomen (Molekülen) im Kristallverbund erfolgt wegen der Kopplung eine Aufspaltung der Energieniveaus. In einem Kristallverbund ( $n \approx 10^{29}/\text{m}^3$ ) ergeben sich damit sehr viele Energieniveaus, die ganz dicht neben einander liegen, siehe Bild EG512B. Man kann also von einem Energieband sprechen. Ein Atom hat mehrere Elektronenschalen und daher auch mehrere Energiebänder.

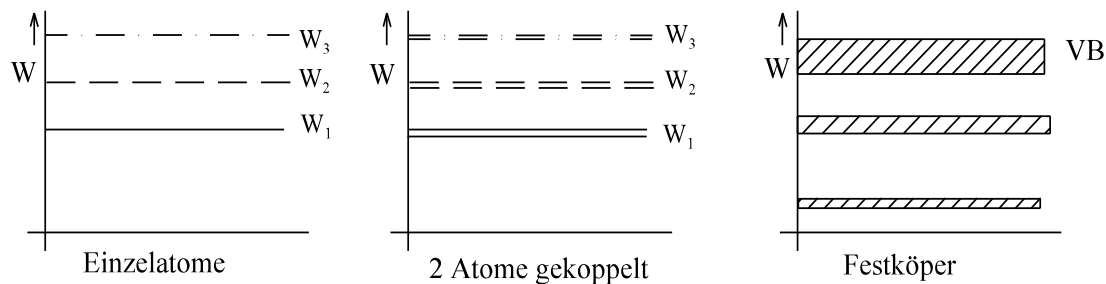


Bild EG512B: Aufspaltung der Energieniveaus

Welche Elektronen tragen zum Stromtransport und somit zur Leitfähigkeit bei? Antwort: Die Elektronen auf der äußersten Schale. Das sind die Elektronen, die sich im oberen Energieband befinden. Die äußersten Elektronen werden auch Valenzelektronen genannt. Das Energieband heißt danach **Valenzband (VB)**. Frage: Wie unterscheiden sich nun Leiter, Halbleiter und Isolatoren in den Energiebändern. Dazu gibt es außer den vorhandenen Energiebändern der Atome auch noch ein **Leitungsband**. In diesem Leitungsband müssen sich die Elektronen befinden, oder auf dieses Energieniveau angehoben werden, damit die Elektronen zum Stromtransport beitragen können. Die Lage von Leiterband und Valenzband bei den unterschiedlichen Leitungsarten zeigt Bild EG512C.

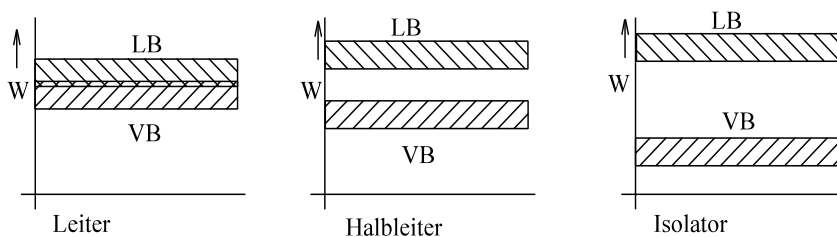


Bild EG512C: Unterschiedliche Abstände von Leitungs- und Valenzband

**Leiter:** Valenzband (VB) und Leiterband (LB) überlappen sich.

**Halbleiter:** VB und LB überlappen sich nicht. Der Energieabstand zwischen VB und LB ist nicht so groß, dass durch thermische Energie einige Elektronen von VB ins LB gelangen können.

**Isolatoren:** VB und LB liegen soweit auseinander, dass durch thermische Energie nur sehr sehr wenige Elektronen vom VB ins LB gelangen können.

### 5.1.3. Die elektrische Leitfähigkeit

Mit dem bekannten ohmschen Gesetz und dem Widerstand eines Leiters gleichen Querschnitts

$$U = I \cdot R \quad R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$$

ergibt sich durch Umformung

$$U = I \cdot \frac{l}{\kappa \cdot A}$$

$$\kappa \frac{U}{l} = \frac{I}{A}$$

und Ersetzen von

$$\frac{U}{l} = E \quad \frac{I}{A} = J$$

das ohmsche Gesetz in Elementarform:

$$J = \kappa \cdot E$$

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

Aus Abschnitt 2.1.9 ist bekannt:

$$I = q \cdot n \cdot A \cdot v \quad J = \frac{I}{A}$$

$$J = q \cdot n \cdot v = \kappa \cdot E$$

Damit ist im linearen Fall ist die Geschwindigkeit der Elektronen proportional zur angelegten Feldstärke:

$$v \sim E$$

oder ausgedrückt mit der Proportionalitätskonstanten b

$$v = b \cdot E$$

b - Elektronenbeweglichkeit

$$[b] = \frac{[v]}{[E]} = \frac{m/s}{V/m} = \frac{m^2}{Vs}$$

Aus dem Vergleich der beiden Gleichungen

$$J = q \cdot n \cdot v = q \cdot n \cdot b \cdot E$$

$$J = \kappa \cdot E$$

ergibt sich die elektrische Leitfähigkeit zu:

$$\kappa = q \cdot n \cdot b$$

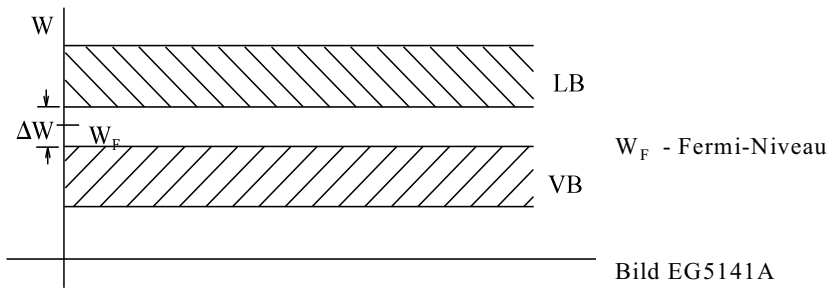
Die elektrische Leitfähigkeit ist somit abhängig von

- der Anzahl der Ladungsträger und
- der Beweglichkeit der Ladungsträger.

Bei den einzelnen Leitungsarten (Leiter, Halbleiter, Isolator) weisen die oben angeführten beiden Eigenschaften unterschiedliches Verhalten auf. Dieses soll in den nächsten Abschnitten erläutert werden.

## 5.1.4. Halbleitung

### 5.1.4.1. Eigenleitung



Halbleiter bestehen aus Elementen der 4. Gruppe im Periodensystem (Ge, Si, Se) oder aus Molekülverbindungen der 3. und 5. Gruppe des Periodensystems (GaAs, InSp). Je nach Material weisen die Halbleiter eine unterschiedliche Differenz  $\Delta W$  zwischen Leitungsband (LB) und Valenzband (LB) auf, siehe Tabelle 5.1.

HL	Se	Ge	Si	GaAs	Isolator	InSp
$\Delta W/eV$	2.20	0.72	1.12	1.38	3...6	0.2

Tabelle 5.1: Energie-Differenz zwischen Leitungs- und Valenzband bei verschiedenen Halbleitern

Nun sind statistisch gesehen nicht alle Elektronen auf dem gleichen Energieniveau. Um dieses zu erklären, muss ein wenig Wahrscheinlichkeitsrechnung erläutert werden. Dazu soll an einem einfachen Beispiel die Verteilung der Noten in einer Klausur nach Bild EG5141B betrachtet werden.

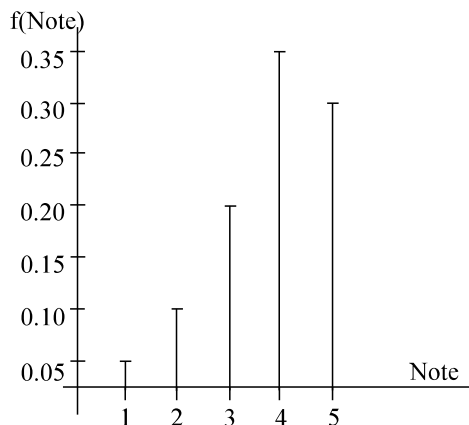


Bild EG5141B: Beispiel einer Notenverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte)

In Bild EG5141B ist die Wahrscheinlichkeit dargestellt, welche Note zu erwarten ist. Man spricht von Wahrscheinlichkeitsdichte. Aus Bild EG5141B ist ablesbar:

Note	Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\text{Note})$
1	$0.05 \triangleq 5\%$
2	$0.1 \triangleq 10\%$
3	$0.2 \triangleq 20\%$
4	$0.35 \triangleq 35\%$
5	$0.3 \triangleq 30\%$

Aus Bild EG5141B ist ebenso ablesbar, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, eine Note gleich oder besser einer bestimmten Note zu erwarten. Somit kann die Wahrscheinlichkeit angegeben werden:

Note	Wahrscheinlichkeit $F(\text{Note})$
1	$0.05 \triangleq 5\%$
2	$0.15 \triangleq 15\%$
3	$0.35 \triangleq 35\%$
4	$0.70 \triangleq 70\%$
5	$1.0 \triangleq 100\%$



Die obere Tabelle in ein Diagramm umgesetzt, ergibt das Bild EG5141C.

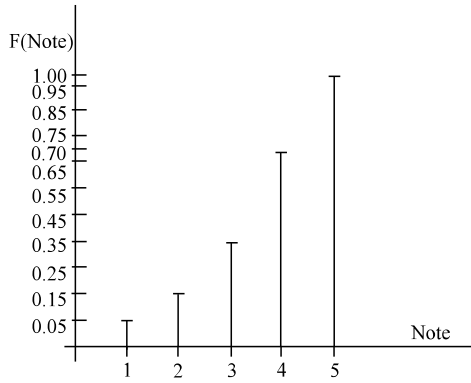


Bild EG5141C: Beispiel der Wahrscheinlichkeit eine Note besser oder gleich einer bestimmten Note zu bekommen nach der Notenverteilung von Bild EG5141B

Der Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(\text{Note})$  und Wahrscheinlichkeit  $F(\text{Note})$  ist durch die folgende Summe gegeben:

$$F(\text{Note}) = \sum_{i=1}^{\text{Note}} f(i)$$

Aus der Bedingung, dass eine Note besser gleich "5" ist, 100 % beträgt, ergibt sich

$$F(\infty) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) = 1$$

Das obige Beispiel war ein diskretes, d.h. es gibt endlich viele Noten (Abszissen-Werte). In der Technik ist meist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeit vorhanden, d.h. in einem bestimmten Bereich kann ein physikalischer Wert  $x$ , statistisch gesehen, jede Größe annehmen. Die diskreten Verteilungen nach den Bildern EG5141B und EG5141C gehen in kontinuierliche Verläufe über. Der Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  und der Wahrscheinlichkeit  $F(x)$  geht von der Summe über in das folgende Integral:

$$F(x) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x^*) dx^*$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 100 %, dass ein Wert von  $x$  kleiner gleich  $\infty$  ist:

$$F(\infty) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Zurück zum Problem der Eigenleitung von Halbleitern. Nach der **Fermi-Verteilung** (hier nicht hergeleitet)

$$f(W) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_F}{kT}\right)}$$

$$k = 8.6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$$

$$k \cdot T_0 = 0.026 \text{ eV}$$

weisen die Elektronen eine unterschiedlichen Energieverteilung auf, siehe Bild EG5141D. Das Fermi-Niveau liegt etwa in der Mitte zwischen LB und VB.

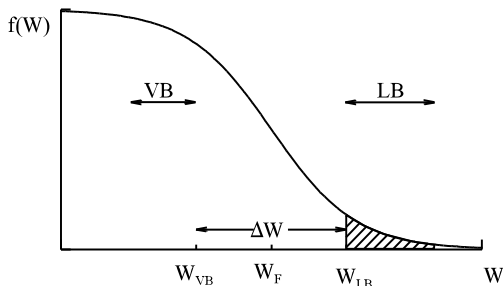


Bild EG5141D: Wahrscheinlichkeitsschicht der Energie der Elektronen im Halbleiter

Die schraffierte Fläche in Bild EG5141D entspricht der Anzahl der Elektronen, die eine Energie aufweisen, damit sich diese im Leitungsband befinden. Dieser Anteil kann zur Stromleitung beitragen. Den Einfluss der Temperatur zeigt Bild EG5141E.

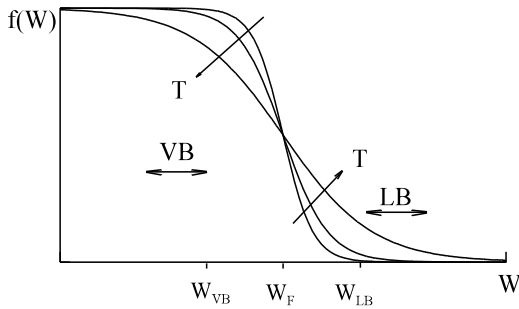


Bild EG5141E: Einfluss der Temperatur auf die Energieverteilung der Elektronen

Mit zunehmender Temperatur steigt bei Halbleitern die Anzahl der Elektronen im Leitungsband exponentiell an. Da die Beweglichkeit in gleicher Größenordnung bleibt, steigt die Leitfähigkeit bei Halbleitern auch exponentiell an. Die obere Formel für die Anzahl der freien Ladungsträger-Wahrscheinlichkeitsschichte kann für die folgenden Extremfälle sehr gut angenähert werden:

$$W \gg W_F \quad f(W) \approx \exp\left[-\frac{W - W_F}{kT}\right] \tag{A}$$

$$W \ll W_F \quad f(W) \approx 1 - \exp\left[\frac{W - W_F}{kT}\right] \tag{B}$$

Im Bereich des Leitungsbandes von Halbleitern gilt die Gleichung (A). Nach Bild EG5141D und Gleichung (A) haben die meisten Elektronen weniger Energie als die unterste Grenze des LB, aber einige wenige sind noch im LB vorhanden. Man spricht von Eigenleitung der Halbleiter.

Bei  $T \approx 0$  befinden sich nach Gleichung (A) wegen  $e^{-\infty}$  keine Elektronen im Leitungsband. Dagegen steigt mit zunehmender Temperatur die Anzahl der Elektronen im Leitungsband und somit auch die Leitfähigkeit.

- $T \approx 0 \quad \Rightarrow \quad$  Halbleiter ist Isolator
- $T \gg T_0 \quad \Rightarrow \quad$  Halbleiter weist bessere Leitfähigkeit auf

Als Beispiel die Daten der Eigenleitung von GE und SI bei Raumtemperatur:

SI	20°C	$n_i = 6.8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$	$n_A$
GE	20°C	$n_i = 2.4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$	$n_A = 4.4 \cdot 10^{22} \text{ Atome/cm}^3$

$n_A$  - Anzahl der Atome

$n_i$  - Anzahl der Elektronen im LB bei Eigenleitung

Damit trägt bei GE nur jedes  $10^9$ -te Atom zur Eigenleitung bei.

**Generation, Rekombination**

Die Energie der Elektronen ist aufgrund von Energieaustausch im Kristallverbund zeitlich nicht konstant.

Erhält ein Elektron eine höhere Energie als die Untergrenze des Leistungsband "entsteht" ein neuer freier Ladungsträger. Man spricht von Ladungsträger-Generation. Dieser Vorgang wird in Bild EG5141F im Kristallverbund dargestellt und in Bild EG5141G im Bändermodell. Im Kristallverbund entspricht die Generation ein Lösen des Elektrons aus der Bindung. Verliert das Elektron durch Energieaustausch wieder an Energie, fällt es in das Valenzband zurück. Dieser Vorgang wird Rekombination gekannt und ist die Umkehrung der Generation. Im Bändermodell entspricht die Rekombination dem Übergang von Leitungsband in das Valenzband, siehe Bild EG5141G. Im Kristallverbund bewirkt dieser Vorgang das "Einfangen" eines Elektrons in ein vorher frei gewordenes "Loch"

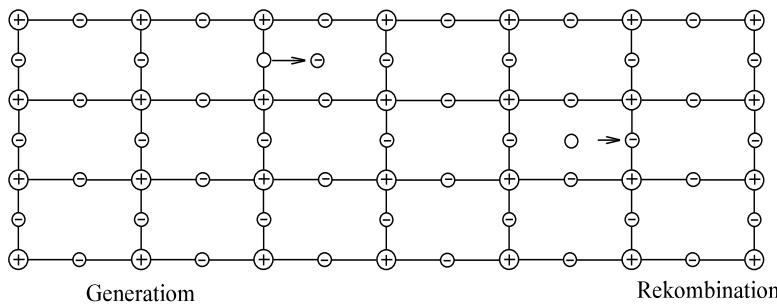


Bild EG5141F: Generation und Rekombination von Ladungsträgern im Kristallverbund

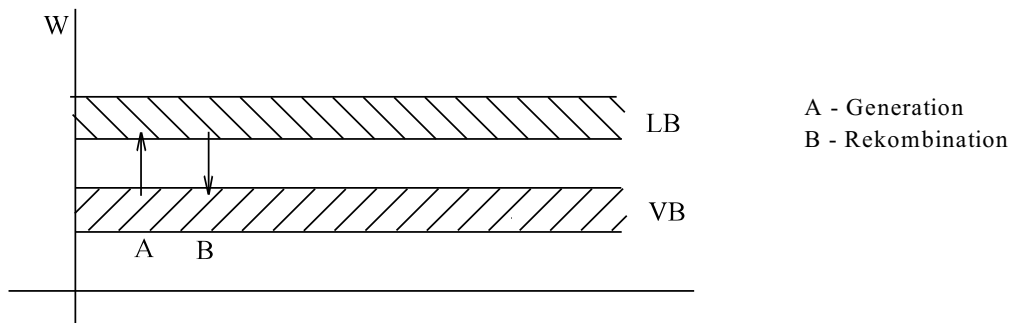


Bild EG5141G: Generation (A) und Rekombination (B) von Ladungsträgern im Bändermodell

**Zusammenfassung:**

**Übergang VB → LB ⇒ Generation:** Elektron wird aus Kristallverbund gelöst.

**Übergang LB → VB ⇒ Rekombination:** Elektron wird wieder vom Kristallgitter eingefangen.

**5.1.4.2. Störstellenleitung**

Die Bedeutung der Halbleiter ergab sich erst durch Störstellenleitung (die Störstellenleitfähigkeit).

**Dotieren:** Zugabe von fünfwertigen oder dreiwertigen Elementen in den vierwertigen Kristallverbund

$10^{13}$  bis  $10^{20}$  Fremdatomen/cm<sup>3</sup>

bei etwa  $10^{22}$  Eigenatomen/cm<sup>3</sup>

**n-Leitung**

fünfwertige Elemente zugaben ⇒ Donator: As - Arsen  
Sb - Antimon  
P - Phosphor

Das 5. Elektron steht fast frei zur Verfügung.

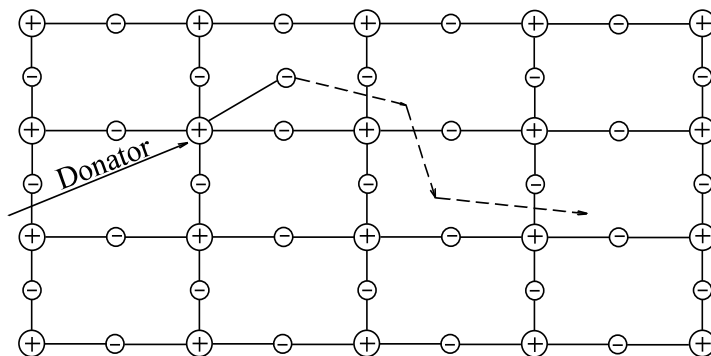


Bild EG51421A: n-Leitung der Störstellen im Kristallverbund

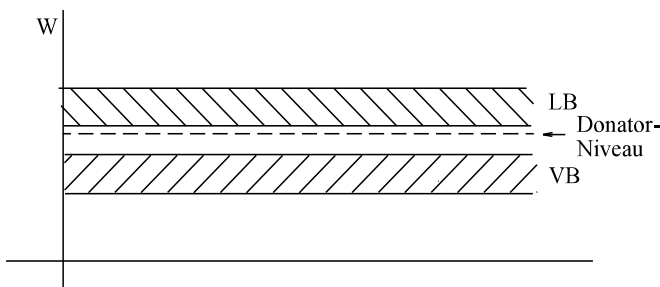


Bild EG51421B: Donator-Niveau, n-Leitung im Bändermodell

Die Energie um vom Donator-Niveau ins LB zu gelangen, ist wesentlich geringer als die vom VB ins LB (etwa 1/36). Da der Abstand im Bändermodell geringer ist, gelangen auch mehr Elektronen ins Leitungsband.

**p-Leitung**

dreiwertige Elementen zugeben => Akzeptor: Ga - Gallium  
 In - Indium  
 Al - Aluminium  
 B - Bor

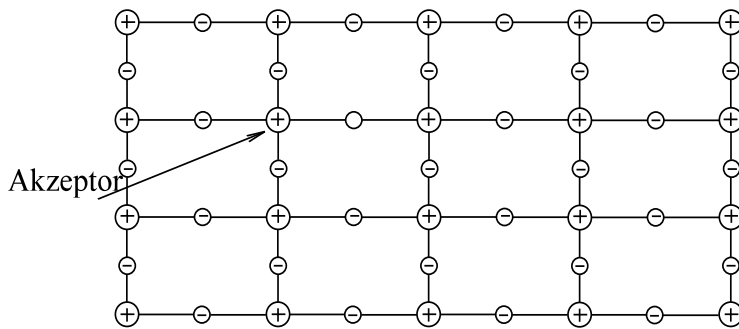


Bild EG51422A: p-Leitung der Störstellen im Kristallverbund

Es fehlt ein Elektron im Gitter. In diesem "Loch" können Fremdelektronen ihren Platz einnehmen. Wo kommen diese Fremdelektronen her? Diese können sich von Loch zu Loch durch hangeln. Dieser Vorgang wird genannt:

p-Leitung  
 Mangel-Leitung  
 Defekt-Leitung  
 Löcher-Leitung

Im Festkörper gibt es physikalisch nur die Bewegung von Elektronen und damit negativen Ladungsträgern. Betrachtet man den Akzeptor mit dem Elektronen-Loch, so wirkt dieser wegen der einen fehlenden negativen Ladung als positive Ladung. Wandert nun das Elektron als tatsächlich existierende physikalische Ladung von Atom zu Atom, so bewegt sich das Loch als virtuelle positive Ladung in die entgegengesetzte Richtung.

Hier handelt es sich also im Prinzip um die Bewegung von positiven Ladungsträgern. Anschaulich am besten erläutern lässt sich dieses mit Hilfe einer aufsteigenden Luftblase im Wasser. Will man die Bewegung des Wassers beschreiben, ist dieses nicht so ohne weiteres möglich. Einfacher wird es, wenn man die Bewegung der Luftblase beschreibt.

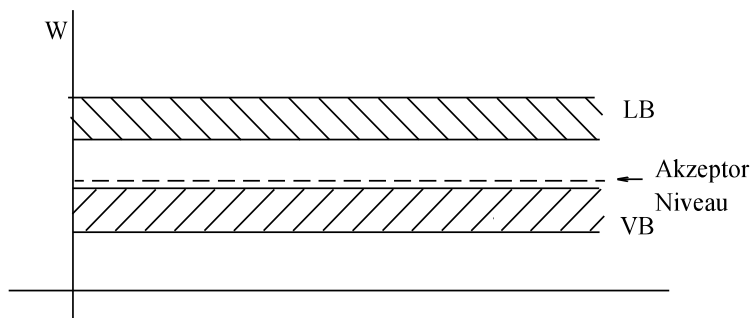


Bild EG51422B: Akzeptor-Niveau im Bändermodell

Im Bändermodell liegt das Akzeptor-Niveau kurz oberhalb des VB. Bei der p-Leitung ist alles umgekehrt. So muss hier das Elektron ins VB verschwinden (vom Atom eingefangen werden), damit ein positiver Ladungsträger (Loch) entsteht.

In den weiteren Abschnitten wird bei der p-Leitung nur noch die Bewegung von positiven Ladungsträgern diskutiert.

**Raumladung**

Die bislang betrachteten Halbleiter weisen im Normalfall keine Raumladung auf. Die Raumladung  $\rho$  gibt die nach außen hin wirksame Ladung pro Volumen an:

$$[\rho] = \frac{As}{m^3} = \frac{C}{m^3}$$

Die Raumladung wird in Kap. 8.4 (2. Semester) behandelt. Zieht man bei n-Halbleitern die Elektronen des Leitungsbandes heraus (Grund später), bleiben die positiven Kernladungen zurück. Es sind mehr positive Ladungen als negative Elektronen vorhanden. Der n-Halbleiter kann damit eine positive Raumladung aufweisen. Beim p-Halbleiter können die Löcher mit Elektronen besetzt werden (Grund auch später). Die zusätzlichen Elektronen können damit beim p-Halbleiter eine negative Raumladung bewirken.

**5.1.5. Der p-n-Übergang**

A) **ohne Anlegen einer Spannung**

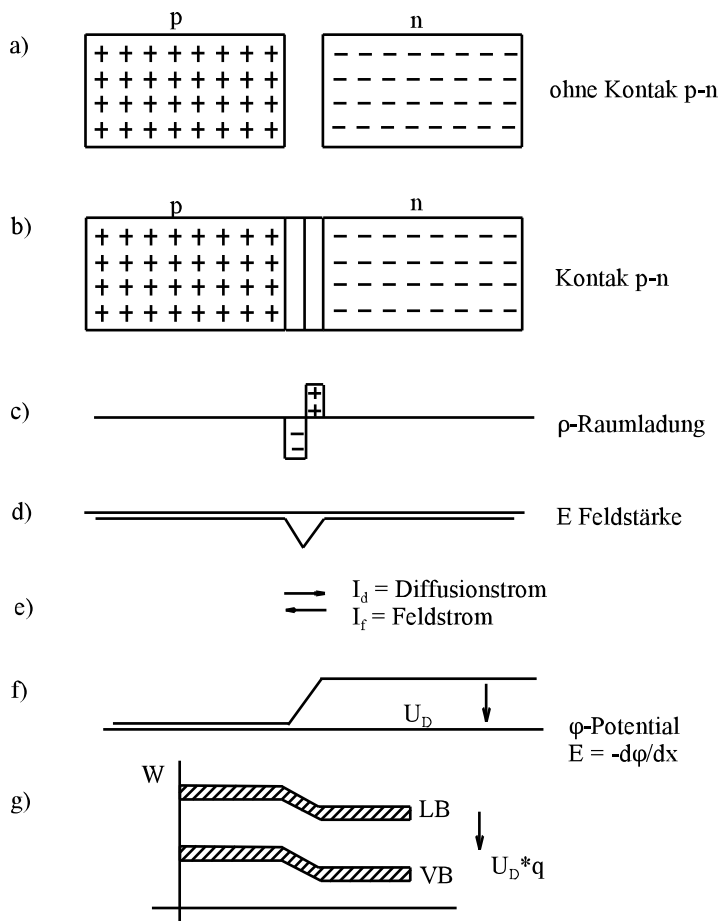


Bild EG515A : p-n-Übergang (Erklärung siehe nächste Seite)

- a) p- und n-Gebiet getrennt
- b) p- und n-Gebiet in Kontakt
- c) Raumladung
- d) Feldstärke
- e) Diffusionsstrom, Feldstrom
- f) Potential
- g) Bändermodell

**Erklärung zu Bild EG515A:**

- a) Ohne Kontakt sind die Ladungsträger im p-Gebiet und im n-Gebiet gleichverteilt. Es tritt keine Raumladung  $\rho$  auf. Die Symbole “+” und “-” stehen nicht für die Raumladung, sondern für die Art der Dotierung. Das Zeichen “+” deutet einen p-Halbleiter an und das Zeichen “-” einen n-Halbleiter.
- b) Bringt man p-Gebiet und n-Gebiet in direktem Kontakt, entsteht an der Kontaktstelle eine sehr unterschiedliche Konzentration an Ladungsträgern. Im p-Gebiet (auf der linken Seite) sind positive Ladungsträger vorhanden und im n-Gebiet negative Ladungsträger. In jedem physikalischen System versuchen sich unterschiedliche Konzentrationen auszugleichen. Diesen Vorgang nennt man Diffusion. damit wandern in der Nähe der Kontaktzone Ladungsträger von einem Gebiet ins andere. Die Überschuss-Elektronen des n-Gebietes füllen die Löcher des p-Gebietes. In der Kontaktzone sind somit keine Ladungsträger mehr vorhanden.
- c) Durch die unter b) erläuterte Diffusion der Ladungsträger entsteht eine Raumladung. Die ins p-Gebiet diffundierten Elektronen des n-Gebietes bewirken im p-Gebiet eine negative Raumladung. Die ins n-Gebiet diffundierten Löcher des p-Gebietes bewirken im n-Gebiet eine positive Raumladung. Zur einfacheren Darstellung und einfacheren Erläuterung ist in Bild EG515A die Funktion der Raumladung rechteckförmig angenommen. In Realität ist diese Funktion eine etwas kompliziertere stetige Funktion. Die angenommene Funktion ist aber ausreichend, um die auftretenden Effekte zu erläutern. Beim dargestellten Beispiel ist die Dotierung und damit die Anzahl der Ladungsträger im n-Gebiet und im p-Gebiet gleich. Dieses bewirkt beim Beispiel eine gleiche Ausdehnung der beiden Raumladungszonen in die jeweiligen Gebiete. In der Praxis wird die Dotierung recht unterschiedlich gestaltet. Ein paar Zahlenwerte:
- $d_0$  - einige  $\mu\text{m}$ -Dicke der Raumladungszone  
 $E$  - zu einigen 1000 kV/cm-Feldstärke (siehe auch d)
- d) Eine Grundgleichung der theoretischen Elektrotechnik in einer Dimension (x-Richtung) lautet (Herleitung erst im 2. Semester, Kap. 8.18) :
- $$E = \int (\rho/\epsilon) dx$$
- $\rho$  - Raumladung  
 $E$  - Feldstärke  
 $x$  - Orts-Koordinate  
 $\epsilon$  - Dielektrizitätskonstante
- Die grafische Integration des Teilbildes c ergibt das Teilbild d.
- e) Aufgrund der Feldstärke aus d ergibt sich ein Strom, der sogenannte Feldstrom  $I_f$ . Der Stromkreis ist nicht geschlossen, wie kann ein Feldstrom fließen ? Der Ausgleich geschieht durch Diffusion. Aufgrund der unterschiedlichen Ladungsträger-Konzentration versucht sich ein Gleichgewicht einzustellen, der sogenannte Diffusionsstrom  $I_D$ . Feldstrom  $I_f$  und Diffusionsstrom  $I_D$  überlagern sich. Als Summe fließt kein Strom.
- f) Eine weitere Grundgleichung der theoretischen Elektrotechnik (Herleitung in Kap. 4.1.2), wenn nur die Dimension x eine Abhängigkeit aufweist, lautet:
- $$\varphi = - \int E dx \varphi - \text{Potential}$$
- Durch grafische Integration von E (Teilbild d) erhält man das Teilbild f. Die Integration einer abschnittswise linearen Funktion ergibt parabelförmige Abschnitte. Wegen der einfacheren Darstellung wird der Verlauf durch abschnittsweise Geraden dargestellt. Tatsächlich ist die Funktion in der ersten Ableitung stetig. Zwischen p- und n-Gebiet besteht demnach die Potentialdifferenz  $U_D$ :
- $U_D$  - Diffusionsspannung                      0.5...1 V
- g) Durch  $U_D$  wird die Energie im Bändermodell zwischen p- und n-Gebiet verschoben

**B) Spannung in Sperrichtung**

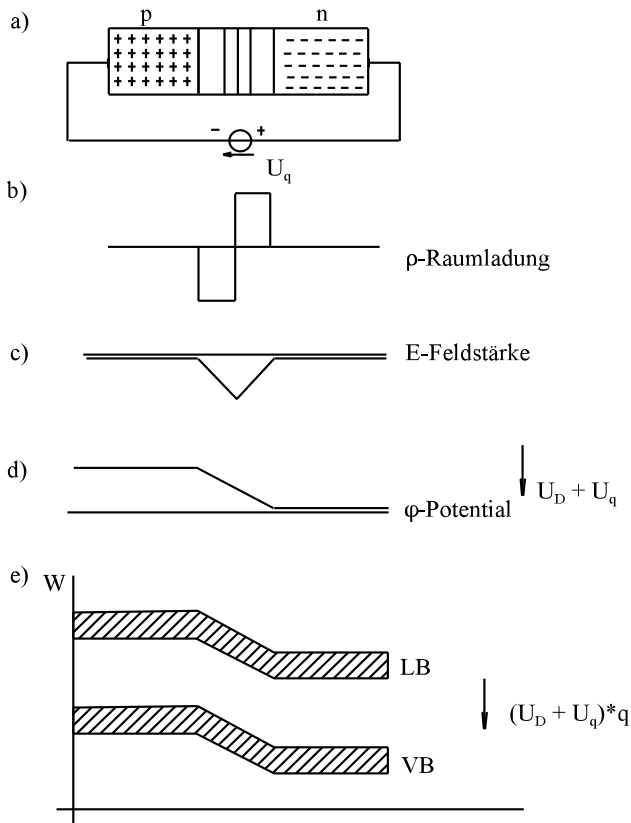
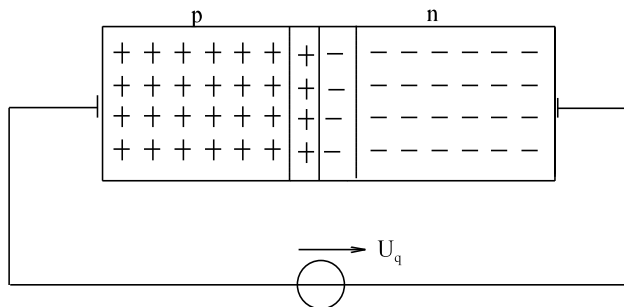


Bild EG515B: Anlegen einer Spannung in Sperrichtung  
 a) Anordnung, Ladungsträgerzustand  
 b) Raumladung  
 c) Feldstärke  
 d) Potential  
 e) Bändermodell

Durch die Spannungsquelle werden zusätzliche Ladungsträger der Sperrschicht entzogen.

- Ausdehnung der Sperrschicht
- größeres Raumladungsgebiet
- größere Feldstärke
- um  $U_q$  vergrößerte Potentialdifferenz

**C) Spannung in Durchlaßrichtung**



$U_q > U_D$  keine Raumladung  
 keine Feldstärke  
 kein Spannungsabfall  
 => Strom kann fließen

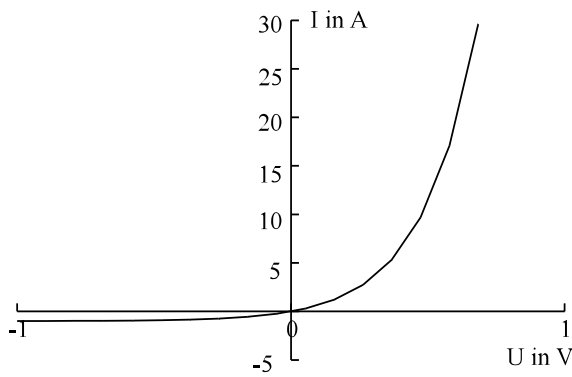
Bild EG515C

**D) Eselsbrücke**

Durchlaßrichtung:  $+U_q$  an p,  $-U_q$  an n  
 Sperrichtung:  $-U_q$  an p,  $+U_q$  an n

**Kennlinie des p-n-Übergangs**

**A) Theoretische Kennlinie aufgrund der Trennschicht**



$$I = I_R * \left( e^{\frac{qU}{kT}} - 1 \right)$$

$$I = I_R * \left( e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right)$$

Bild EG515D: Theoretische Kennlinie des p-n-Übergangs

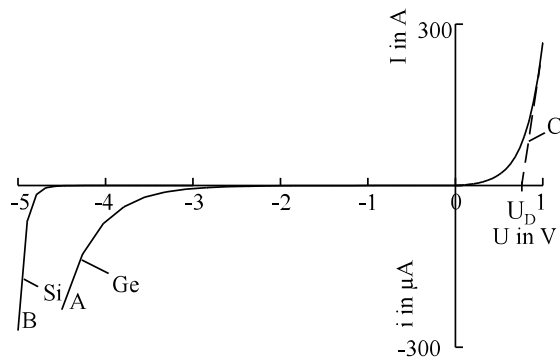
$$\frac{kT}{q} = U_T \quad U_T = 26 \text{ mV} \quad 300 \text{ K}$$

$$U_T = 30 \text{ mV} \quad 350 \text{ K}$$

**B) Reale Kennlinie**

Praktisch haben außer dem Trennschichtverhalten noch die folgenden physikalischen Effekte Einfluss auf die Kennlinie des p-n-Übergangs:

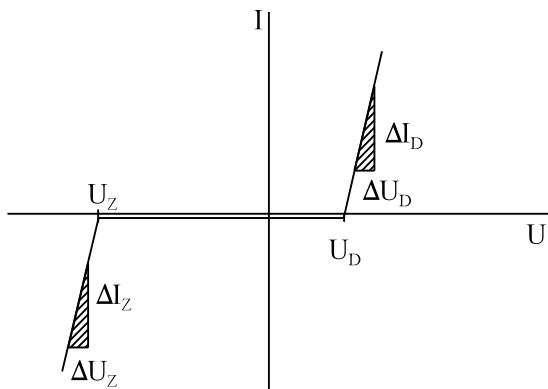
- ohmscher Widerstand des Halbleiters (Bahnwiderstand)
- Durchbruch-Effekt (Zener-Effekt)



- A: Ge: Durchbruch
- B: Si: Durchbruch-Zener-Verhalten
- C: Bahnwiderstand
- A,B: Achtung: Zerstörung möglich

Bild EG515E: Reale Kennlinie des p-n-Übergangs

Die obere Kennlinie ist für die Berechnung von Schaltungen mathematisch schwer beschreibbar. Darum gibt es die verschiedenen Idealisierungen.



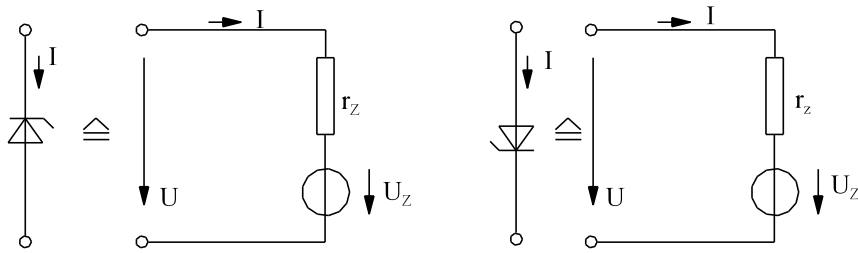
$$r_D = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

$$r_Z = \frac{\Delta U_Z}{\Delta I_Z}$$

Bild EG515F: Annäherung durch Spannungsquellen und differentiellen Widerständen

- $r_D$  - Differentieller Durchgangs (Bahn) Widerstand
- $r_Z$  - Differentieller (Zener) Sperrwiderstand
- $U_Z$  - Zenerspannung
- $U_D$  - Diffusionsspannung





$U, U_Z > 0, U > U_Z, I > 0$

$U, U_Z < 0, U < U_Z, I < 0$

Bild EG515G: ESB für die Sperrichtung, Kennlinie nach Bild EG515F

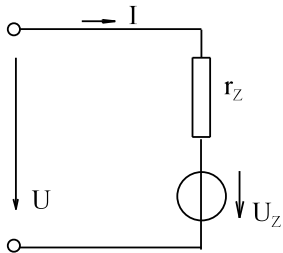


Bild EG515H: ESB für die Durchlaßrichtung, Kennlinie nach Bild EG515F

In der Energietechnik treten häufig Spannungen über 300 V auf. Dann kann die Spannung von  $U_D = 0.7 \text{ V}$  vernachlässigt werden. Die sich ergebende stark vereinfachte Kennlinie ist in Bild EG515I dargestellt.

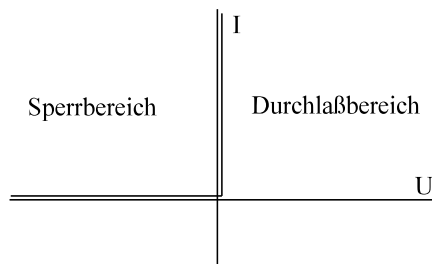


Bild EG515I: Sehr stark idealisierte Kennlinie, ideale Diode

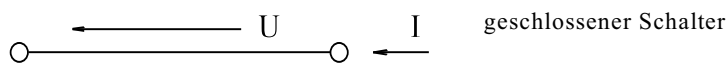


Bild EG515J: ESB im Durchlaßbereich der idealen Diode

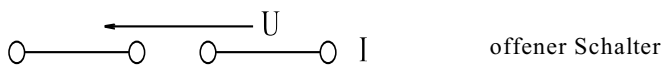


Bild EG515K: ESB im Sperrbereich der idealen Diode

**Schaltzeichen p-n-Übergang, Diode**

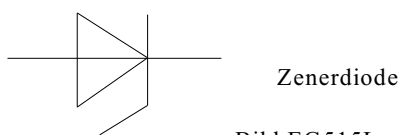


Bild EG515L

Um Dioden mit Kennlinie nach Bild EG515F im Durchlass und Sperrbereich gemeinsam zu simulieren, kann ein Gesamt-ESB mit Hilfe der Bilder EG515G, EG515H und idealen Dioden angegeben werden, siehe Bild EG515M.

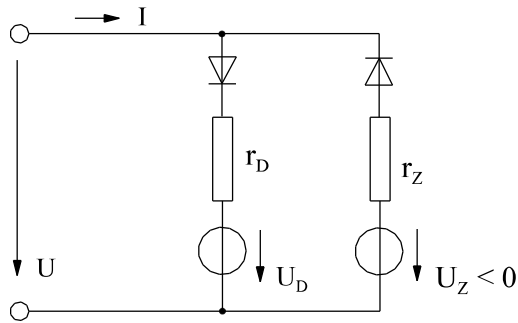
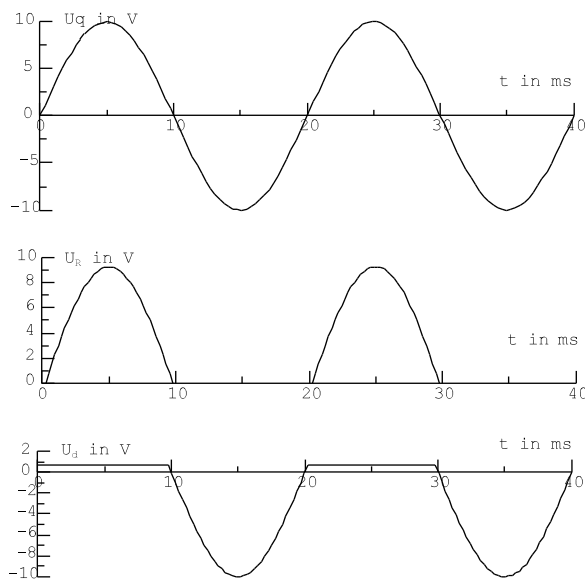
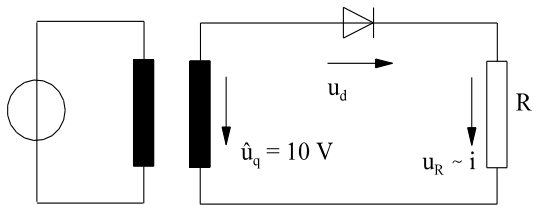


Bild EG515M: Gesamt-ESB einer realen Diode (Kennlinie nach Bild EG515F) mit idealen Dioden

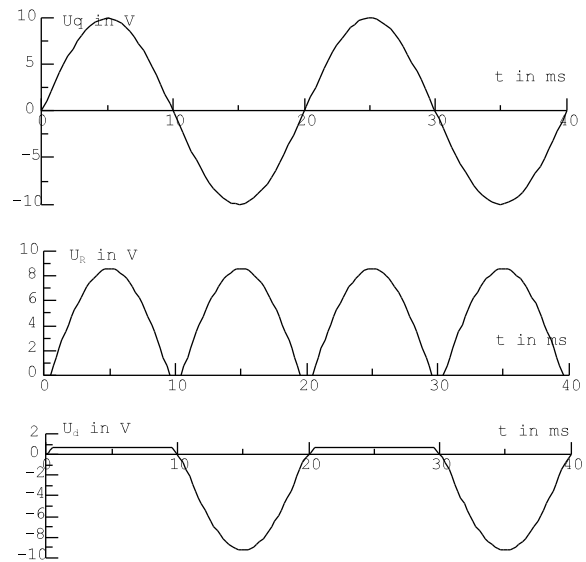
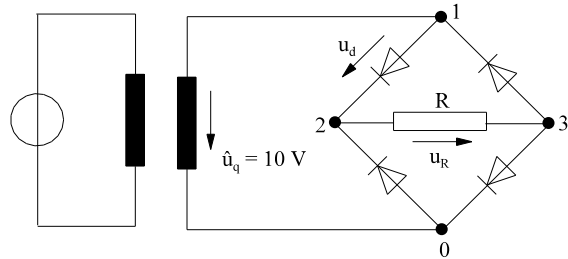
**Anwendung von Dioden**

**a) Gleichrichtung mit Diode**

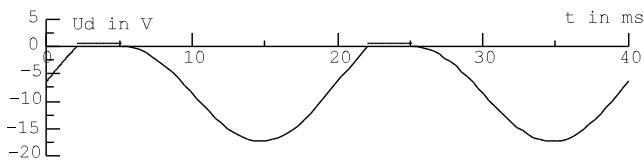
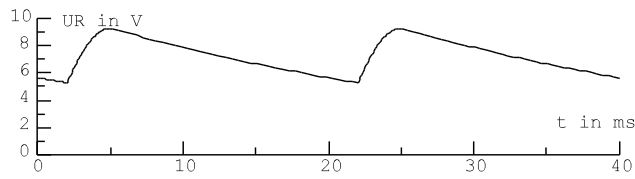
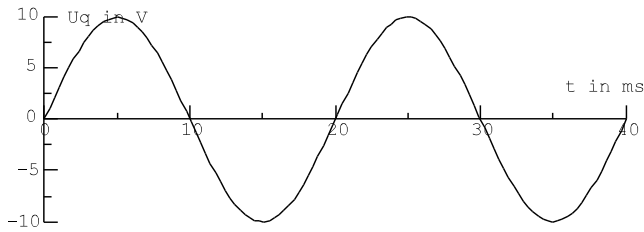
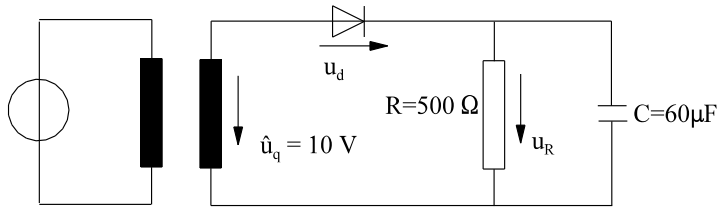
**Einweggleichrichtung mit Diode**



**Brückengleichrichtung mit Dioden**



**Einweggleichrichtung mit Kondensatorglättung**



**b) Spannungsstabilisierung mit Zenerdiode**

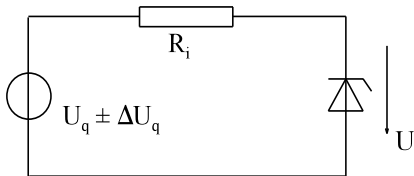
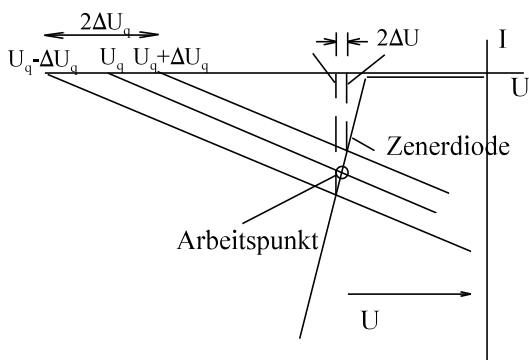


Bild EG515P



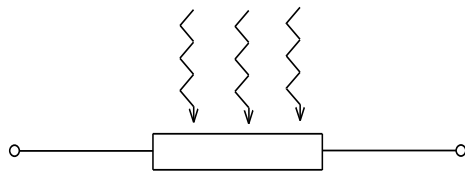
Grafische Methode siehe Kap. 5.2.1. Die relative große Schwankung  $\Delta U_q$  wird durch die Zenerdiode stabilisiert (verringert).

$$\Delta U \ll \Delta U_q$$

Bild EG515K: Spannungsstabilisierung mit Zenerdiode

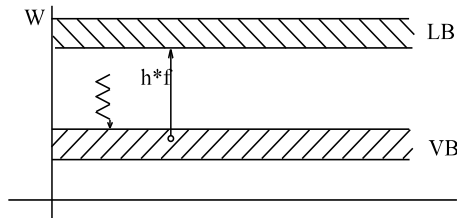
### 5.1.6. Opto-Elektronik

#### A) Lichtabhängiger Widerstand



CdS      Kadmium-Sulfid       $d = 30...50 \mu\text{m}$   
 1500 lux       $\Delta R/R = 10^6$

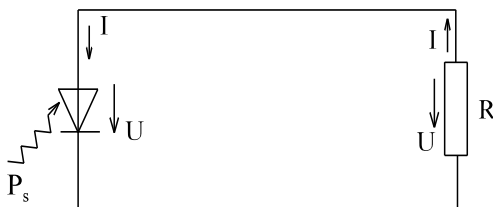
Bild EG516A



Die Energie um vom VB nach dem LB zu kommen, wird durch einen Lichtquant ( $h \cdot f$ ) aufgebracht.

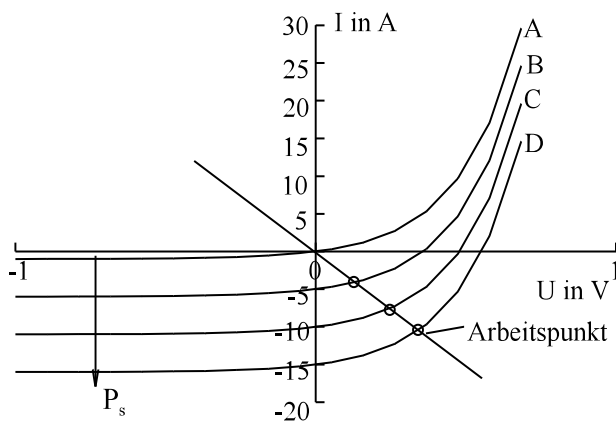
Bild EG516B

#### B) Foto-Element, Solar-Zelle



Ohne Strahlung (Energiezufuhr) ist die Kennlinie des normalen p-n-Übergangs vorhanden, Kennlinie A, Bild EG516D.

Bild EG516C



Durch die Anregung  $P_s$  (Strahlungsleistung) wird die Kennlinie des p-n-Übergangs nach unten verschoben. Durch grafische Methode (erst in Kap. 5.2) ergeben sich die Arbeitspunkte im 4. Quadranten.

Bild EG516D

$U > 0, I < 0$       Energie  $< 0$       =>      Generator

Spektral empfindlich:  
 Si ähnlich wie Sonne  $W \approx 10 \text{ mW/cm}^2$   
 Ge empfindlicher weil  $\Delta W = 0.72 \text{ eV}$       =>      maximale Empfindlichkeit im Roten (IR)

#### C) Leuchtdiode (LED)

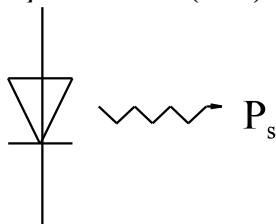


Bild EG516E:      Leuchtdiode

#### D) Optokoppler

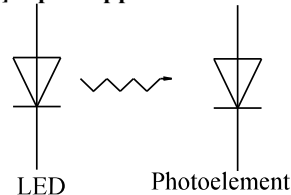


Bild EG516D:      Optokoppler

Vorteil:      galvanische Trennung der Stromkreise

### 5.1.7. Maximale Verlustleistung (Verlustleistungshyperbel)

Alle Bauteile (z. B. Widerstände, Dioden, ...) können über die Oberfläche bei maximal zulässiger Temperatur nur einen maximalen Wärmestrom abgeben. Stationär ( $d/dt = 0$ , keine zeitliche Änderung) wird dieser über die elektrische Leistung  $P = U \cdot I$  zugeführt. Nach  $I$  umgestellt ergibt sich die Verlustleistungshyperbel:

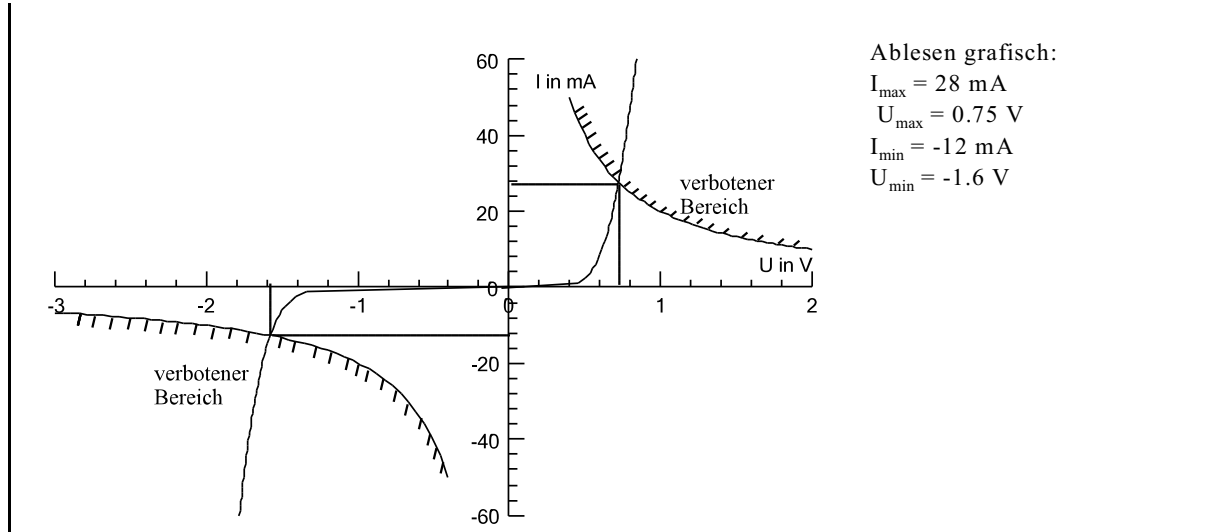
$$I = f(U) = \frac{P}{U}$$

**Beispiel:** Ein Bauteil mit unten angegebener Kennlinie weist eine maximal zulässige Verlustleistung

$P_{\max} = 20 \text{ mW}$  auf. Zu bestimmen sind die Grenzdaten.

**Lösungsweg:**

$$I = \frac{20 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{U} \quad \text{in Kennlinie eingezeichnet (Verlusthyperbel mit verbotenen Bereich)}$$



### 5.1.8. VDR-Widerstände

Voltrag Dependent Resistor

Si feinkörnig gemahlen, plastifiziert, gesintert und kontaktiert.

Leitungsmechanismus ist noch nicht vollständig bekannt. Wahrscheinlich hebt Spannung (Feldstärke) Elektronen vom VB - LB.

**Anwendung:** Begrenzung von Überspannungen: Blitz, Abschalten induktiver Ströme.

**Wirkung:** Bei hohen Spannung wirkt der VDR als Quasi-Kurzschluss. Dadurch werden Überspannungen vermieden.

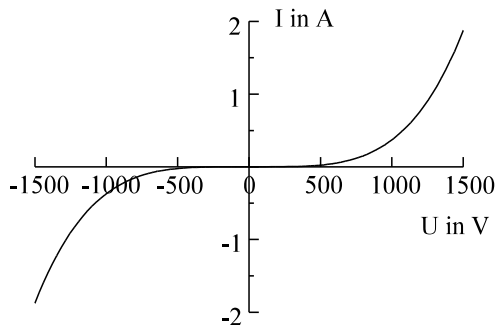


Bild EG517A: Kennlinie eines VDRs

Die Kennlinie eines VDRs kann angenähert werden durch:

$$U = C \left( \frac{I}{1 \text{ A}} \right)^\beta$$

$C = 20 \text{ V} \dots 1 \text{ kV}$

$\beta = 0.14 \dots 0.3$

Umgestellt nach  $I$  ergibt sich:

$$I = 1 \text{ A} \cdot \left( \frac{U}{C} \right)^{1/\beta}$$

Die Berechnung nichtlinearer Kreise (u.a. mit VDR) wird in Abschnitt 5.2 aufgezeigt.

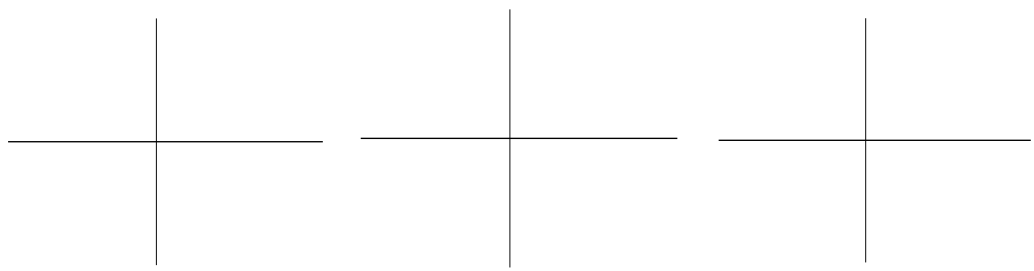
### 5.1.9. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 5.1

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.5.1.A	Bei Anlegen einer Spannung an einem Isolator: * fließt wenig Strom * fließt kein Strom	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.B	Der Unterschied in der Leitfähigkeit von Leitern und Isolatoren beträgt * etwa 5 Zehnerpotenzen * etwa 20 Zehnerpotenzen * etwa 40 Zehnerpotenzen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.C	Die elektrische Leitfähigkeit ergibt sich aus: * der Summe Elementarladung, Beweglichkeit und Anzahl der Ladungsträger. * dem Produkt Elementarladung, Beweglichkeit und Anzahl der Ladungsträger. * der Summe Elementarladung, Beharrlichkeit und Anzahl der Ladungsträger. * der Summe Widerstand, Beharrlichkeit und Anzahl der Ladungsträger. * dem Produkt Elementarladung, Beharrlichkeit und Ionisation der Ladungsträger.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.D	Valenzband und Leitungsband liegen am weitesten auseinander beim: * Leiter * Halbleiter * Isolator	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.E	Beim Leiter * liegen Valenz- und Leistungsband weit auseinander * überlappen sich Leitungs- und Valenzband	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.F	Beim Isolator * liegen Valenz- und Leistungsband weit auseinander * überlappen sich Leitungs- und Valenzband	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.G	Der Abstand von Leitungs- und Valenzband ist am größten beim: * Leiter * Halbleiter * Isolator	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.H	Der Abstand von Leitungs- und Valenzband ist am kleinsten beim: * Leiter * Halbleiter * Isolator	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.I	Bei Temperaturerhöhung im Halbleiter: * verändert sich der Abstand zwischen Leitungs- und Valenzband * bleibt der Abstand zwischen Leitungs- und Valenzband gleich * steigt der Anteil der Ladungsträger im Valenzband * steigt der Anteil der Ladungsträger im Leistungsband	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.J	Die Wahrscheinlichkeitsdichte: * ist das Integral der Wahrscheinlichkeit * ist das Differential der Wahrscheinlichkeit	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.K	Die Wahrscheinlichkeit: * ist das Integral der Wahrscheinlichkeitsdichte * ist das Differential der Wahrscheinlichkeitsdichte	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.L	Beim Halbleiter erhöht sich die Leitfähigkeit mit der Temperatur aufgrund: * der Zunahme der Beweglichkeit * der Zunahme der Ladungsträger	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.M	Rekombination bedeutet: * Die Erzeugung von Ladungsträgern * Das Einfangen von Ladungsträgern	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.N	Generation bedeutet: * Die Erzeugung von Ladungsträgern * Das Einfangen von Ladungsträgern	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.O	Beim p-n-Übergang entsteht die Feldstärke aufgrund * der angelegten Spannung * einer Raumladung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.P	Beim p-n-Übergang bedeutet Durchlassrichtung: * + an p und - an n * - an p und + an n	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.Q	Beim p-n-Übergang bedeutet Sperrrichtung: * + an p und - an n * - an p und + an n	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.R	Galvanische Trennung bedeutet: * keine leitende Verbindung zwischen zwei Netzteilen * Kopplung durch Elektrolyten	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.5.1.S	Galvanische Trennung kann realisiert werden durch: * Transformator * Transistor * Optokoppler	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

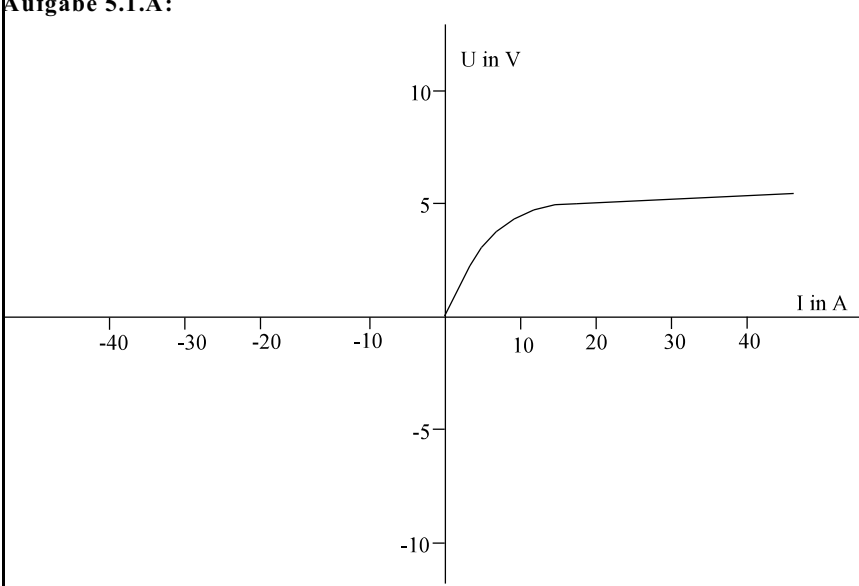
Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.5.1.T</b>	Die Leitfähigkeit eines Halbleiters ist wesentlich größer: * bei Eigenleitung gegenüber Dotierung * bei p-Dotierung gegenüber n-Dotierung * bei Dotierung gegenüber Eigenleitung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.U</b>	p-Dotierung bedeutet: * Löcherleitung * Zugabe 3-wertiger Elemente * Zugabe 5-wertiger Elemente	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.V</b>	n-Dotierung bedeutet: * Löcherleitung * Zugabe 3-wertiger Elemente * Zugabe 5-wertiger Elemente	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.W</b>	Der p-n-Übergang basiert auf: * einer halbdurchlässigen Isolationsschicht * dem Zusammenwirken von p-dotierten und n-dotierten Gebieten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.X</b>	Die Schichtdicke des p-n Übergangs beträgt: * einige Meter * einige mm oder mehr * einige $\mu\text{m}$ oder weniger	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.Y</b>	Die Feldstärke im p-n-Übergang beträgt in der Regel: * bis zu einigen V/m * bis zu einigen kV/m * über 10 kV/cm	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.Z</b>	Der Durchbruch der Kennlinie im negativen Ast: * kann die Diode zerstören * kann zur Spannungsstabilisierung benutzt werden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.a</b>	In Durchlassrichtung hat die Diode in der Regel: * einen Spannungsabfall von etwa 3 V bei Silizium * einen Spannungsabfall von etwa 0.7 V bei Silizium * einen Spannungsabfall von etwa 0.1 V bei Germanium * einen Spannungsabfall von etwa 0.5 V bei Germanium	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.b</b>	Dioden können eingesetzt werden für: * Signalübertagung * Gleichrichtung * Spannungsstabilisierung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.c</b>	Zur Spannungsstabilisierung werden * spezielle Zenerdioden eingesetzt * Dioden im Sperrbereich betrieben * Dioden im Durchlassbereich betrieben	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.d</b>	Das VDR in VDR-Widerständen deutet: * <u>V</u> ariable- <u>D</u> rift- <u>R</u> esistor * <u>V</u> oltage- <u>D</u> ependent- <u>R</u> esistor	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.1.e</b>	Ein VDR wird i. A. eingesetzt: * zur Spannungsstabilisierung * zur Gleichrichtung * zur Vermeidung von Überspannungen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

<p><b>Frage 5.1.A</b> Gegeben Sie das Schaltzeichen an</p> <p>a) Diode</p> <p>b) einer Zenerdiode</p>
<p><b>Frage 5.1.B</b> Skizzieren Sie die Kennlinie eines VDRs.</p>

**Frage 5.1.C** a) Skizzieren Sie eine Diodenkennlinie. Skalieren Sie die Achsen. b) Zeichnen Sie die idealisierte Kennlinie. Bezeichnen Sie die Achsen. c) Zeichnen Sie die stark idealisierte Kennlinie. Bezeichnen Sie die Achsen.



**Aufgabe 5.1.A:**



Ein VDR mit  $P_{\max} = 100 \text{ W}$  weist die obere Kennlinie auf

- Ergänzen Sie die Kennlinie im fehlenden Quadranten.
- Zeichnen Sie die Verlustleistungshyperbel.
- Bestimmen Sie maximalen Strom und maximale Spannung grafisch.

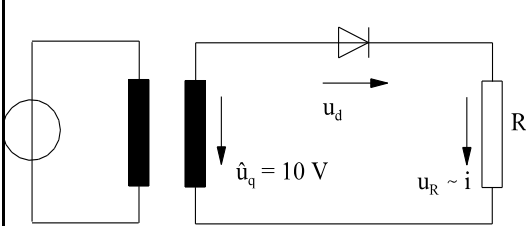
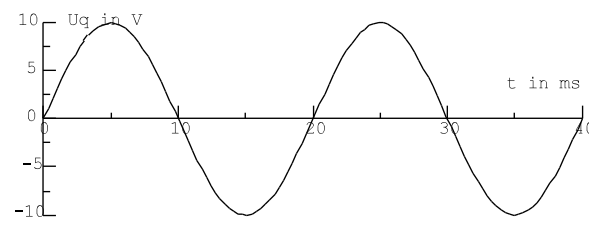
**Aufgabe 5.1.B**

An einem Stab der Länge  $l = 0.1 \text{ m}$  und dem Querschnitt  $A = 1 \text{ mm}^2$  liegt die Spannung  $U$ . Wie viel Elektronen pro Sekunde  $n$  fließen durch den Stab?

**gegeben:**

$\rho_{\text{Leiter}} = 0.01 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{Leiter}} = 1 \text{ V}$
$\rho_{\text{HL}} = 10^9 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{HL}} = 10 \text{ V}$
$\rho_{\text{iso}} = 10^{17} \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	$U_{\text{iso}} = 10 \text{ kV}$
$\rho_{\text{iso}} = 10^{23} \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$	

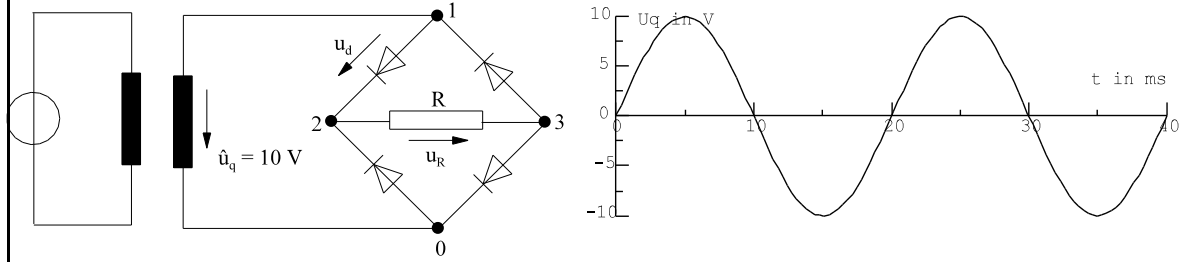
**Aufgabe 5.1.C** Skizzieren Sie den Verlauf von  $u_D$  und  $u_R$ .



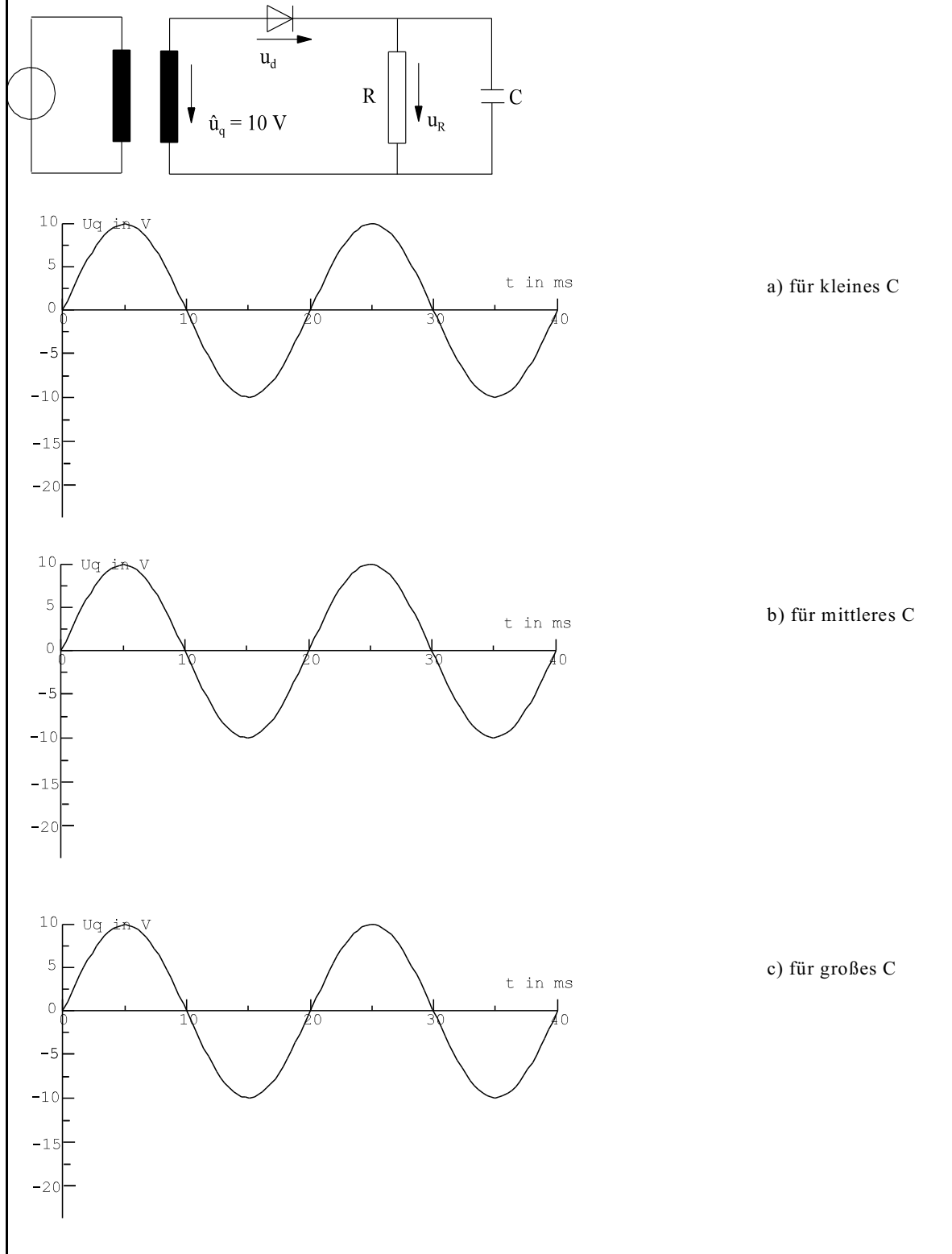
**Aufgabe 5.1.D**

Skizzieren Sie den Verlauf von  $u_D$  und  $u_R$ .

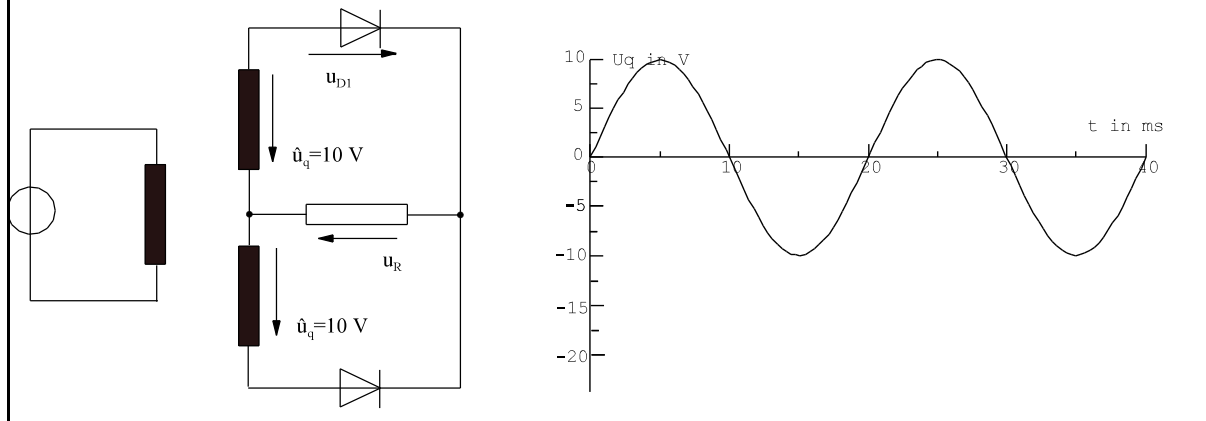


**Aufgabe 5.1.E**

Skizzieren Sie den Verlauf von  $u_D$  und  $u_R$ .



**Aufgabe 5.1.F** Skizzieren Sie den Verlauf von  $u_{D1}$  und  $u_R$ .

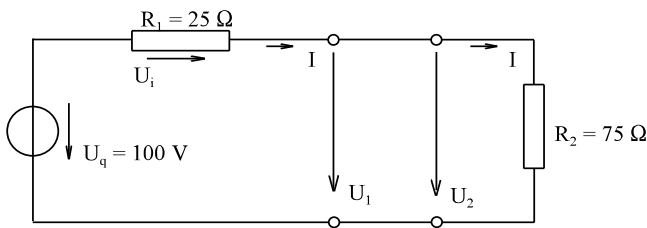


## 5.2. Nichtlineare Gleichstromkreise

### 5.2.1. Grafische Methode

Die grafische Methode soll am linearen Beispiel erläutert werden, weil die Anschauung leichter und der Vergleich mit analytischen Berechnung möglich ist.

**Lineares Beispiel 1:**



**analytisch:** 
$$I = \frac{100\text{ V}}{100\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

$$U_1 = U_2 = I \cdot R_2 = 75\ \text{V}$$

$$U_i = 25\ \text{V}$$

Bild EG521A

Nach Bild EG521A ergeben sich zwei Abhängigkeiten der Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  vom Strom  $I$ :

$$U_1 = f_1(I) = U_q - R_1 \cdot I$$
 Kennlinie der Quelle

$$U_2 = f_2(I) = R_2 \cdot I$$
 Kennlinie der Last

Nach Bild EG521A sind die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  gleich. Analytisches Gleichsetzen ergibt bekanntlich den Strom  $I$  als Ergebnis. Das grafische Gleichsetzen verdeutlicht Bild EG521B. Die zwei Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  werden als Funktion von  $I$  dargestellt. An der Stelle, wo  $U_1 = U_2$  gilt, ist die Maschenregel erfüllt. Hier spricht man dann vom Arbeitspunkt.

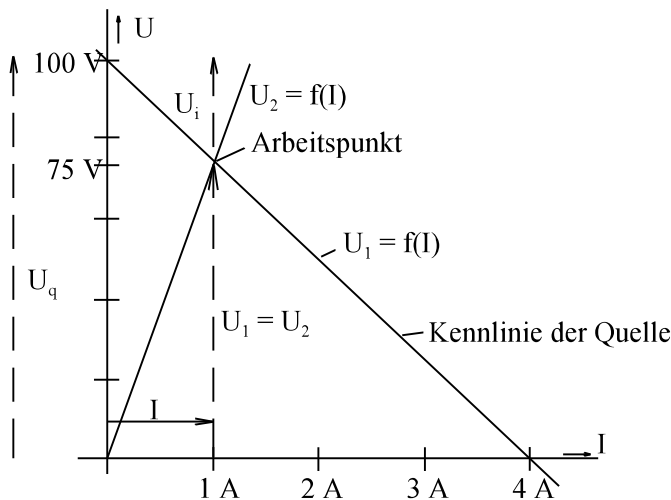


Bild EG521B: Grafische Lösung der Anordnung Bild EG521A

Die Werte  $I$ ,  $U_1 = U_2$ ,  $U_i$  lassen sich auch grafisch aus Bild EG521B ablesen.

$$U_q = 100\ \text{V}$$

$$I = 1\ \text{A}$$

$$U_1 = U_2 = 75\ \text{V}$$

$$U_i = 25\ \text{V}$$

**Beispiel 2: Anwendung:** Arbeitspunkt der Diode bestimmen

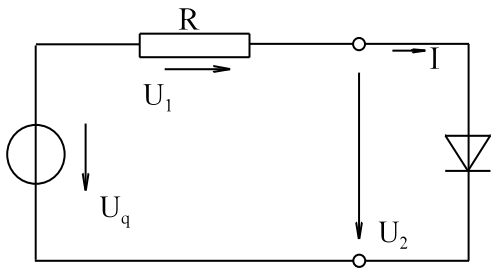


Bild EG521C

**gegeben:** Dioden-Kennlinie  $I = f(U_2)$ , Kennlinie der Quelle mit  $U_q$  und  $R$

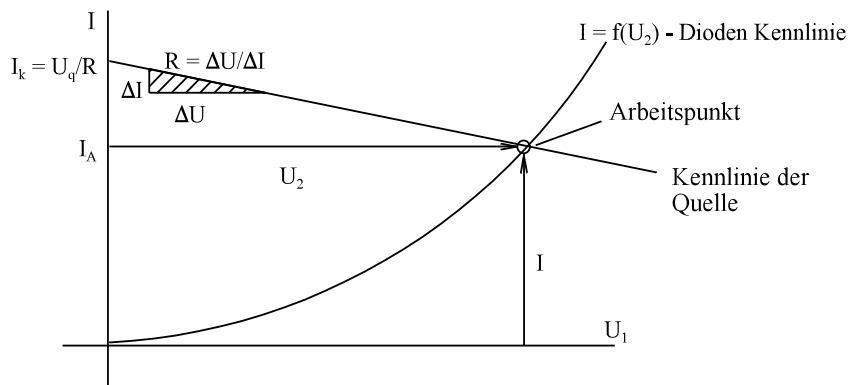


Bild EG521D

### 5.2.2. Grafische Reihenschaltung

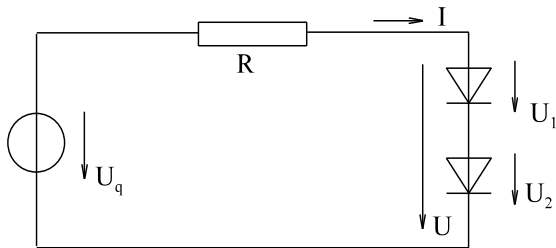


Bild EG522A

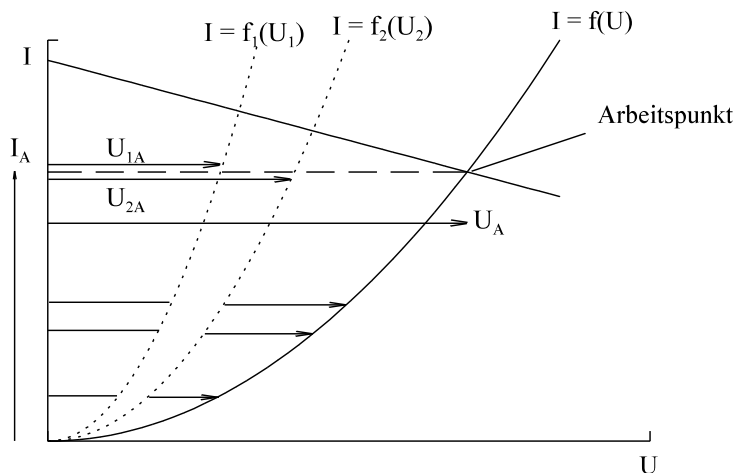


Bild EG522B: Grafische Lösung der Anordnung nach Bild EG522A

Die grafische Lösung der Anordnung nach Bild EG522A ist in Bild EG522B aufgezeigt. Folgende Schritte müssen ausgeführt werden:

- A] Die beiden Kennlinien der zwei Dioden  $I = f(U_1)$  und  $I = f(U_2)$  sind gegeben. In Bild EG522B sind diese gestrichelt dargestellt.
- B] Das Ziel ist, eine gemeinsame Kennlinie zu konstruieren. In einer Reihenschaltung ist der Strom gleich und die Spannungen müssen addiert werden. Dieses ist auch grafisch auszuführen. Bei gleichem Strom (waagerechte Pfeile) werden die beiden Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  in U-Richtung addiert. Mathematische Erklärung:

gegeben:  $I = f_1(U_1), I = f_2(U_2)$

gesucht:  $I = f(U)$

Umkehrfunktion:  $U_1 = g_1(I), U_2 = g_2(I)$

Masche:  $U = U_1 + U_2 = g_1(I) + g_2(I) = g(I)^*$

Umkehrfunktion:  $I = f(U)$

\*) Diese Addition der beiden Kennlinien in U-Richtung ist in Bild EG522B dargestellt.

- C] Mit der Gesamtkennlinie  $I = f(U)$  kann der Arbeitspunkt wie in Abschnitt 5.2.1 bestimmt werden. Die Arbeitspunktgrößen lassen sich aus Bild EG522B ablesen.
- D] Zusätzlich zu Abschnitt 5.2.1 lassen sich aus Bild EG522B auch die Einzelspannung der Reihenschaltung ( $U_1, U_2$ ) ablesen.

### 5.2.3. Grafische Parallelschaltung

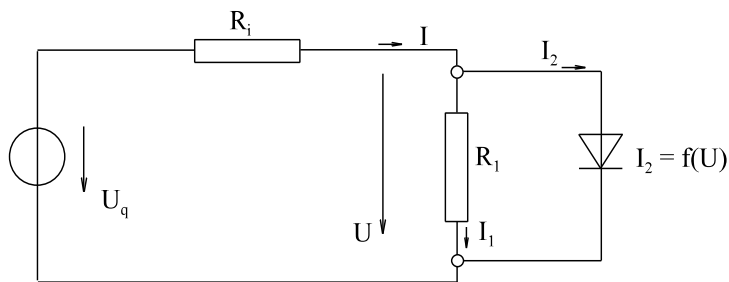
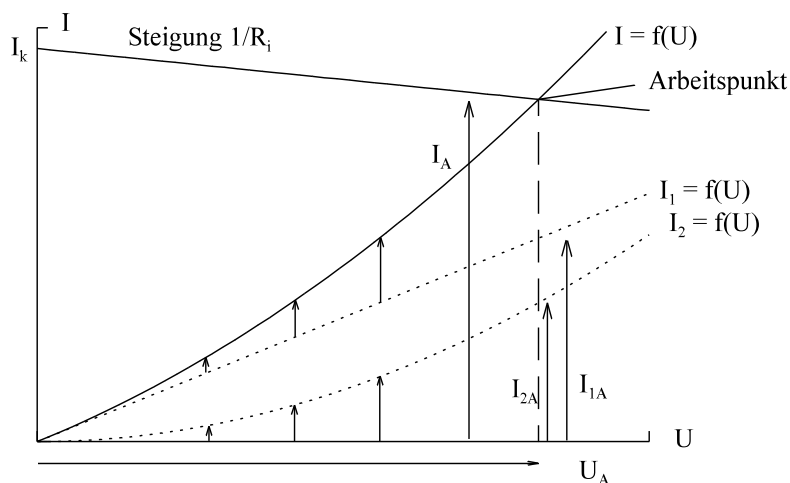


Bild EG523A



$$I_k = \frac{U_q}{R_i}$$

Bild EG523B:

Grafische Lösung der Anordnung nach Bild EG523A

Die grafische Lösung der Anordnung nach Bild EG523A ist in Bild EG523B aufgezeigt. Folgende Schritte müssen ausgeführt werden:

- A] Die beiden Kennlinie des Widerstandes  $I_1 = f_1(U) = U/R_1$  und der Diode  $I_2 = f_2(U)$  sind gegeben. In Bild EG523B sind diese gestrichelt dargestellt.
- B] Das Ziel wiederum ist, eine gemeinsame Kennlinie zu konstruieren. In einer Parallelschaltung ist die Spannung die gemeinsame Größe und die Ströme müssen addiert werden. Dieses ist wiederum grafisch auszuführen. Bei gleichem Spannungen (senkrechte Pfeile) werden die beiden Ströme  $I_1$  und  $I_2$  in I-Richtung addiert. Mathematische Erklärung:

gegeben:  $I_1 = f_1(U) = U/R_1$   $I_2 = f_2(U)$

gesucht:  $I = f(U)$

Gesamtfunktion:  $I = I_1 + I_2 = f_1(U) + f_2(U)^*$

\*) Diese Addition der beiden Kennlinien in I-Richtung ist in Bild EG523B dargestellt.

- C] Mit der Gesamtkennlinie  $I = f(U)$  kann der Arbeitspunkt wie in Abschnitt 5.2.1 bestimmt werden. Die Arbeitspunktgrößen lassen sich aus Bild EG523B ablesen.
- D] Zusätzlich zu Abschnitt 5.2.1 lassen sich aus Bild EG523B auch die Einzelströme der Parallelschaltung ( $I_1$ ,  $I_2$ ) ablesen.

### 5.2.4. Polynom-Annäherung

Nichtlineare Kennlinien sind meist messtechnisch aufgenommen oder ergeben sich aus komplizierten technischen Berechnungen.

**Beispiele:**

Messen:  $I = f(U)$  (mehrere Messpunkte)

Berechnung:  $I = I_R \cdot [\exp(u/u_r) - 1]$

Sowohl mit Messpunkten als auch mit analytischer Kennlinie lässt sich schlecht analytisch rechnen. Ausweg: Die Kennlinie wird abschnittsweise durch ein Polynom ersetzt:

$$I = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + a_3 U^3 + \dots$$

**Beispiel:**

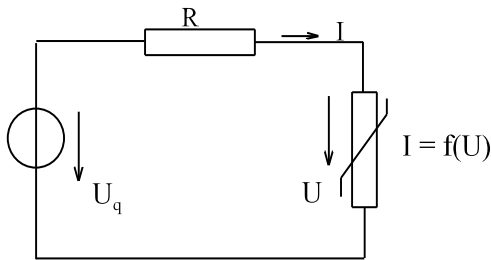


Bild EG524A

**gegeben:**

- Anordnung nach Bild EG524A
- $U_q$
- $R$
- drei Punkte der Kennlinie:  $I_1, U_1, I_2, U_2, I_3, U_3$

**gesucht:**  $U, I$

**Lösung:** Durch obere drei Punkte lässt sich eine Parabel 2. Grades legen:

$$I = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 \quad (\text{A})$$

Die Koeffizienten  $a_0, a_1$  und  $a_2$  lassen sich mit Hilfe oberer drei Punkte bestimmen, siehe Mathematik.

Ein Maschenumlauf nach Bild EG524A ergibt:

$$U_q = I \cdot R + U \quad (\text{B})$$

Der Strom  $I$  in (B) wird durch (A) ersetzt:

$$U_q = a_0 \cdot R + a_1 \cdot R \cdot U + a_2 \cdot R \cdot U^2 + U \quad (\text{C})$$

Die quadratische Gleichung (C) in  $U$  wird umgeformt und gelöst:

$$U^2 + \frac{a_1 \cdot R + 1}{a_2 \cdot R} \cdot U + \frac{a_0 \cdot R - U_q}{a_2 \cdot R} = 0$$

$$U = -\frac{a_1 \cdot R + 1}{2a_2 \cdot R} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1 \cdot R + 1}{2a_2 \cdot R}\right)^2 + \frac{U_q - a_0 \cdot R}{a_2 \cdot R}}$$

**Anmerkungen**

- Polynomannäherung gilt nur für einen gewissen Bereich.
- In der oberen Gleichung ergeben sich zwei Lösungen  $\pm \sqrt{\quad}$ . Eine Lösung ist meist nicht relevant, weil diese außerhalb des anzupassenden Bereiches liegt.
- Eine Polynomannäherung höherer Ordnung ist auch möglich. Die Lösung wird dann numerisch bestimmt. Achtung: Nur die Lösung im Bereich der Anpassung verwenden.

### 5.2.5. Linearisierung im Arbeitspunkt

In den Abschnitten 5.2.1 bis 5.2.4 wurden Methoden zur Bestimmung der Arbeitspunkte nichtlinearer Gleichstromkreise vorgestellt. In diesem Abschnitt soll eine Methode vorgestellt werden, wo kleine Abweichungen von den ermittelten Arbeitspunkten betrachtet werden. Beispiel einer Anwendung: Einer Gleichspannung ist eine kleine Wechselspannung überlagert.

Die Herleitung soll anhand eines einfachen Beispiels nach Bild EG525A erfolgen.

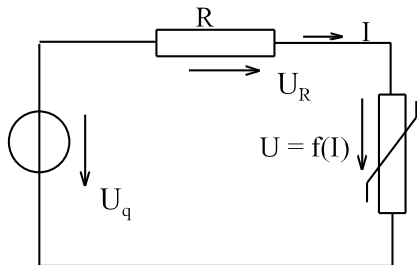
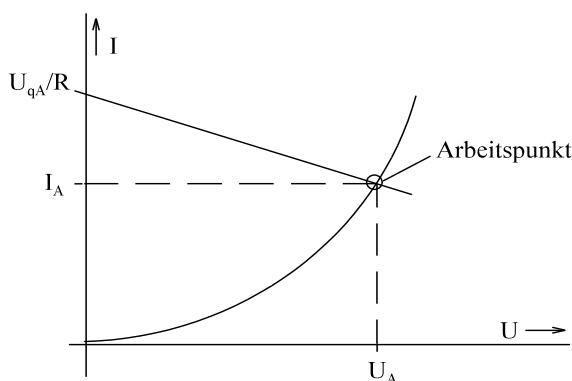


Bild EG525A

Die grafische Lösung des oberen Kreises wurde in Abschnitt 5.2.1 erläutert, siehe Bild EG525B.



Aus Bild EG525B ergeben sich die Größen im Arbeitspunkt:

- $U_{qA}$  - Spannung der Quelle, mit dem die Größen des Arbeitspunkts bestimmt werden
- $U_A$  - Spannung am nichtlinearen Widerstand im Arbeitspunkt
- $I_A$  - Strom im Arbeitspunkt
- $U_{RA}$  - Spannung am Innenwiderstand der Quelle im Arbeitspunkt

Bild EG525B

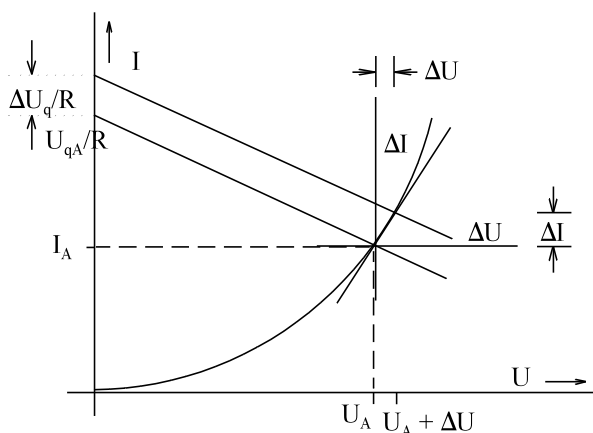
Aus Bild EGEG525A ergibt ein Maschenumlauf:

$$U_q = U_R + U \quad (\text{A})$$

Für den Arbeitspunkt wird speziell ermittelt:

$$U_{qA} = U_{RA} + U_A \quad (\text{B})$$

Erhöht sich die Spannung der Quelle um  $\Delta U_q$ , müsste die Kennlinie der Quelle in Bild EG525B parallel verschoben werden ( $U_q = U_{qA} + \Delta U_q$ ). Das Ergebnis ist in Bild EG525C dargestellt.



Nach Bild EG525C ergeben sich die Abweichungen vom Arbeitspunkt:

- $\Delta I$  - Abweichung Strom
- $\Delta U$  - Abweichung Spannung am nichtlinearen Widerstand
- $\Delta U_R$  - Abweichung Spannung am Innenwiderstand der Quelle
- $\Delta U_q$  - Abweichung der Quellenspannung

Bild EG525C

Die Gesamtgrößen ergeben sich aus Arbeitspunktgrößen plus Abweichung vom Arbeitspunkt:

$$I = I_A + \Delta I \quad (C)$$

$$U = U_A + \Delta U \quad (D)$$

$$U_R = U_{RA} + \Delta U_R \quad (E)$$

$$U_q = U_{qA} + \Delta U_q \quad (F)$$

Für die Abweichungen vom Arbeitspunkt lässt sich ein neues Koordinatensystem  $(\Delta I, \Delta U)$  einführen, siehe Bild EG525C.

Nähert man die Kennlinie des nichtlinearen Widerstandes im Arbeitspunkt durch eine Gerade an (siehe Bild EG525C), kann man angeben

$$\frac{\Delta U}{\Delta I} = r = \frac{1}{\frac{\Delta I}{\Delta U}} = \frac{1}{g} \quad \Delta U = r \cdot \Delta I$$

Die Größen  $r$  und  $g$  werden differentieller Widerstand bzw. differentieller Leitwert genannt.

$$r = \left. \frac{dU}{dI} \right|_{I=I_A} \quad g = \left. \frac{dI}{dU} \right|_{U=U_A}$$

$$\Delta U = r \cdot \Delta I \quad (G)$$

Einsetzen von (F), (E) und (D) in (A) ergibt

$$U_q + \Delta U_q = U_{RA} + \Delta U_R + U_A + \Delta U \quad (H)$$

$$U_{qA} = U_{RA} + U_A \quad (B)$$

Aus der Subtraktion von (H) und (B) folgt eine Gleichung für die Abweichung vom Arbeitspunkt:

$$\Delta U_q = \Delta U_R + \Delta U \quad (I)$$

Mit  $\Delta U_R = R \cdot \Delta I$

$$\Delta U = r \cdot \Delta I$$

kann (I) angegeben werden als:  $\Delta U_q = R \cdot \Delta I + r \cdot \Delta I = (R + r) \cdot \Delta I \quad (J)$

Gleichung (J) ergibt eine lineare Ersatzschaltung für die Abweichungen vom Arbeitspunkt, siehe Bild EG525D.

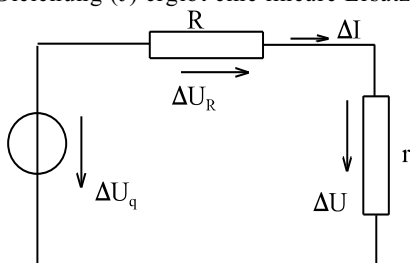


Bild EG525D

**Fazit:** Bei nichtlinearen Schaltungen kann bei kleinen Abweichungen vom Arbeitspunkt mit differentiellen Widerständen/Leitwerten für die Abweichungen gerechnet werden.

### Schema Linearisierung:

- A] Arbeitspunkt bestimmen (meist grafisch, oder auch analytisch)
- B] Durch Linearisieren Steigung  $r$  oder Steigung  $g$  bestimmen
- C] Mit Leitwert  $g$  oder Widerstand  $r$  für das nichtlineare Element können deren Abweichungen von Arbeitspunkt berechnet werden. Lineare Widerstände bleiben erhalten.



### 5.2.6. Lineare Ersatzschaltung

**Prinzip:**

Die nichtlineare Kennlinie wird abschnittsweise durch Geraden angenähert. Jede Gerade lässt sich durch Quelle mit Innenwiderstand darstellen.

**Beispiel:**

Herleitung des ESBs einer Zenerdiode

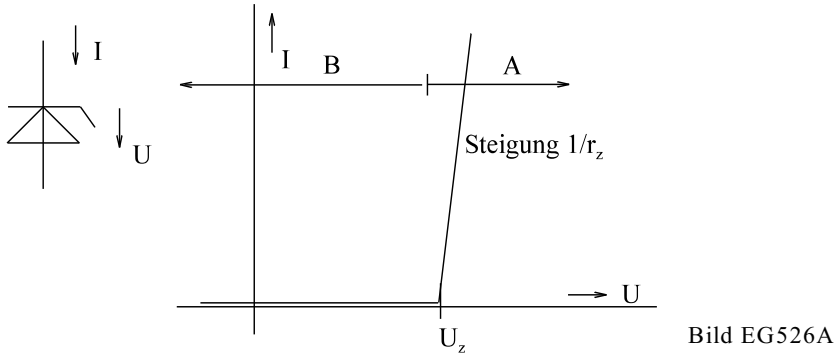


Bild EG526A

Die obere Kennlinie einer Zenerdiode lässt sich durch zwei Bereiche angeben. Für den Bereich A gilt nach Bild EG526A:

$$I = \frac{U - U_z}{r_z}$$

$$U = I \cdot r_z + U_z$$

Aus der oberen Formel lässt sich mit Hilfe eines Maschenumlaufs das ESB EG526B für den Bereich A angeben.

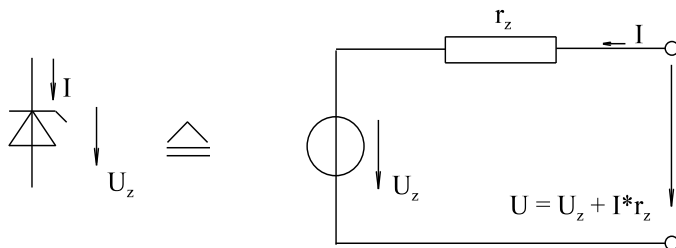


Bild EG526B: ESB für  $U > U_z$  bzw.  $I > 0$

Falls bei der Berechnung mit dem ESB EG526B negative Ströme ( gleich  $U < U_z$ ) auftreten, ist der Bereich A verlassen. Es muss für den Bereich B ein ESB gefunden werden. Da kein Strom fließt (bei im Bereich B beliebiger Spannung) ist ein unendlicher Widerstand vorhanden, dieses bedeutet offene Klemmen.

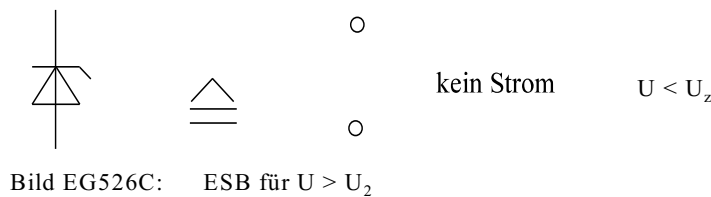


Bild EG526C: ESB für  $U < U_z$

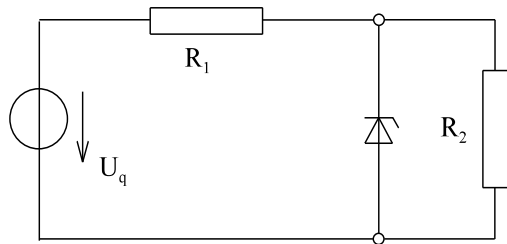
**Beispiel:**

Bild EG526D

Zur Berechnung der oberen Schaltung (Bild EG526D) wird die Zenerdiode durch das ESB EG526B ersetzt. Das Ergebnis ist in Bild EG526E zu ersehen.

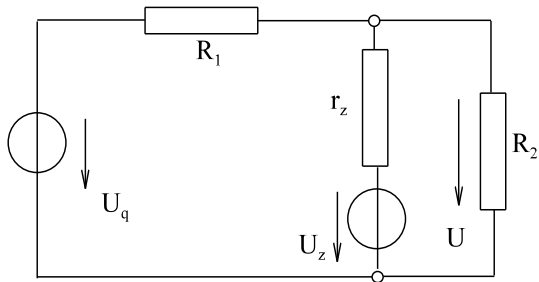


Bild EG526E

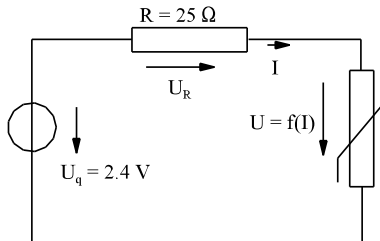
Die obere Schaltung kann mit den linearen Methoden der Kapitel 2 und 3 berechnet werden. Achtung: Falls die Spannung  $U$  kleiner  $U_z$  wird ist die obere Schaltung nicht gültig. Der Zweig der Zenerdiode muss dann herausgenommen werden.

### 5.2.7. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 5.2

In diesem Abschnitt sollen die Methoden der Abschnitte 5.2.1 bis 5.2.6 anhand von Beispielen geübt werden. Die Nummerierung der Beispiele ist in diesem Abschnitt anders als üblich, weil verschiedene Berechnungsmethoden am gleichen Beispiel erläutert werden sollen.

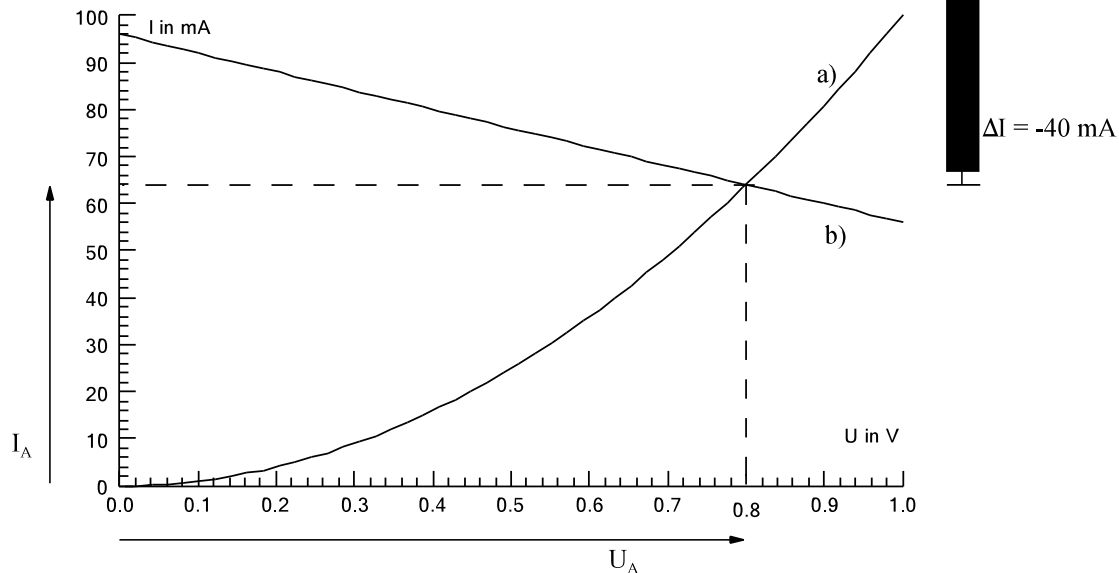
#### Beispiel 1.A: (einfache grafische Lösung)

Ein nichtlinearer Widerstand mit der Kennlinie  $I = 100 \text{ mA} \cdot (U/1 \text{ V})^2$  wird in Durchlaßrichtung von einer Spannungsquelle  $U_q = 2.4 \text{ V}$  über einen Widerstand  $R = 25 \Omega$  betrieben.



- Zeichnen Sie die Kennlinie  $I = f(U)$ . (1 cm  $\triangleq$  0.1 V, 1 cm  $\triangleq$  10 mA)
- Zeichnen Sie die Kennlinie der Spannungsquelle  $U_q$  und des Widerstandes  $R$  in das gleiche Diagramm.
- Bestimmen Sie Strom  $I_A$  und Spannung  $U_A$  des Arbeitspunktes grafisch.

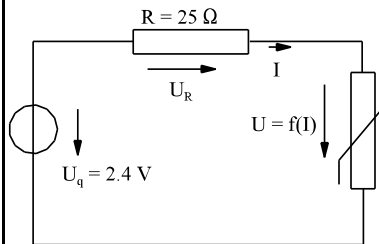
#### Lösungsweg:



- siehe Skizze
- ein Punkt:  $U_1 = 0$   $I_1 = U_q/R = 2.4 \text{ V}/25 \Omega = 96 \text{ mA}$   
Steigung:  $\Delta U/\Delta I = -R$  Wahl:  $\Delta U = 1 \text{ V}$   $\Delta I = -\Delta U/R = -1 \text{ V}/25 \Omega = -40 \text{ mA}$
- Ablesen aus Skizze:  $U_A = 0.8 \text{ V}$   $I_A = 0.64 \text{ mA}$

**Beispiel 1.B:** (analytische Lösung mit Polynomnäherung)

Ein nichtlinearer Widerstand mit der Kennlinie  $I = 100 \text{ mA} * (U/1 \text{ V})^2$  wird in Durchlaßrichtung von einer Spannungsquelle über einen Widerstand  $R = 25 \Omega$  betrieben. Bestimmen Sie Ströme  $I$  und Spannungen  $U$  analytisch. Der Arbeitspunkt ist mit  $U_q = 2.4 \text{ V}$  zu wählen.



- a)  $U_q = 2.4 \text{ V}$                       b)  $U_q = 2.39 \text{ V}$   
 c)  $U_q = 2.3 \text{ V}$                       d)  $U_q = 2.0 \text{ V}$

**Lösungsweg:**

$$U_q = U_R + U(I) \quad U_R = R * I = R * 100 \text{ mA} (U/1 \text{ V})^2$$

$$U_q = R * 100 \text{ mA} \left( \frac{U}{1 \text{ V}} \right)^2 + U$$

$$\left( \frac{U}{1 \text{ V}} \right)^2 + \frac{1}{R * 100 \text{ mA}} * U - \frac{U_q}{R * 100 \text{ mA}} = 0$$

$$\left( \frac{U}{1 \text{ V}} \right)^2 + \frac{1}{2.5} * \left( \frac{U}{1 \text{ V}} \right) - \frac{U_q}{2.5 \text{ V}} = 0$$

$$U = 1 \text{ V} * \left[ -\frac{1}{5} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{U_q}{2.5 \text{ V}}} \right]$$

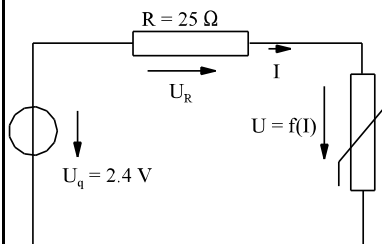
Die Lösung mit Minus-Zeichen entfällt, weil diese Lösung im Bereich des Polynoms ( $U < 0$ ) liegt, in dem die Anpassung nicht gültig ist.

$$U = 0.2 \text{ V} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + 10 * U_q / 1 \text{ V}} \right]$$

$$I = 100 \text{ mA} * \left( \frac{U}{1 \text{ V}} \right)^2$$

$U_q$	$U$	$I$
2.4 V	0.80000 V	64.000 mA
2.39 V	0.79800 V	63.680 mA
2.3 V	0.77980 V	60.808 mA
2.0 V	0.71652 V	51.339 mA

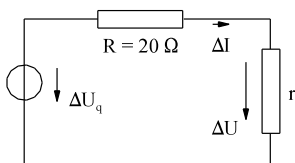
**Beispiel 1.C:** (Linearisierung im Arbeitspunkt mit analytischer Bestimmung der Steigung)  
 Ein nichtlinearer Widerstand mit der Kennlinie  $I = 100 \text{ mA} * (U/1 \text{ V})^2$  wird in Durchlaßrichtung von einer Spannungsquelle über einen Widerstand  $R = 25 \Omega$  betrieben. Bestimmen Sie Ströme und Spannungen nach der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt" mit analytischer Bestimmung der Steigung.



- a)  $U_q = 2.4 \text{ V}$       b)  $U_q = 2.39 \text{ V}$   
 c)  $U_q = 2.3 \text{ V}$       d)  $U_q = 2.0 \text{ V}$

**Lösungsweg:**

Arbeitspunkt für linearisiertes ESB       $U_{qA} = 2.4 \text{ V} \Rightarrow U_A = 0.8 \text{ V}$        $I_A = 64 \text{ mA}$       aus Beispiel 1.B



$$r = \left. \frac{dU}{dI} \right|_{I=I_A} = \frac{1}{\left. \frac{dI}{dU} \right|_{U=U_A}} = \frac{1}{100 \text{ mA} * 2 * \frac{1}{1 \text{ V}} \left( \frac{U}{1 \text{ V}} \right)} = \frac{1 \text{ V}}{0.2 \text{ A} * \frac{0.8 \text{ V}}{1 \text{ V}}} = 6.25 \Omega$$

$$\Delta I = \frac{\Delta U_q}{R+r} = \frac{\Delta U_q}{20 \Omega + 6.25 \Omega} = \frac{\Delta U_q}{26.25 \Omega}$$

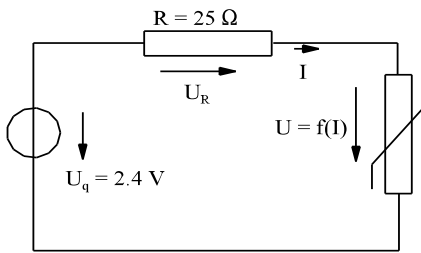
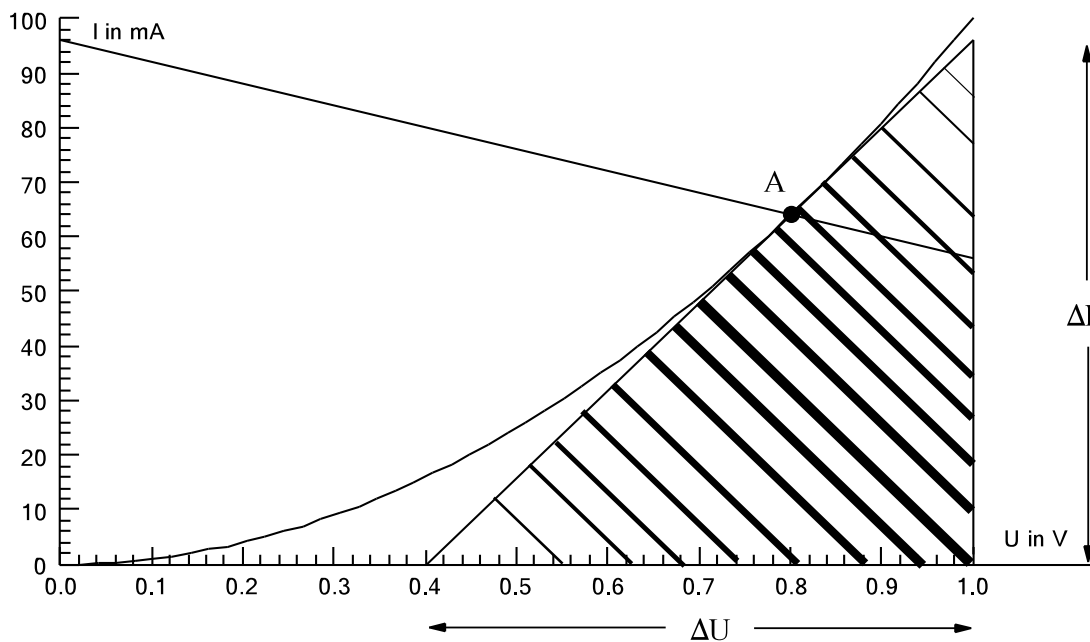
$$\Delta U = \Delta I * r = \frac{r}{R+r} * \Delta U_q = \frac{6.25 \Omega}{26.25 \Omega} * \Delta U_q$$

Linearisiertes ESB						Exakte Lösung	
$U_q$	$\Delta U_q$	$\Delta I$	$\Delta U$	$I$	$U$	$I$	$U$
2.4 V	0 V	0 A	0 V	64 mA	0.8 V	64.000 mA	0.80000 V
2.39 V	-0.01 V	-0.381 mA	-0.00238 V	63.619 mA	0.79762 V	63.680 mA	0.79800 V
2.3 V	-0.1 V	-3.810 mA	-0.02381 V	60.190 mA	0.77619 V	60.808 mA	0.77980 V
2.0 V	-0.4 V	-15.238 mA	-0.09524 V	48.762 mA	0.70476 V	51.399 mA	0.71652 V

Fazit: Der Fehler nimmt mit der Abweichung vom Arbeitspunkt zu.

**Beispiel 1.D:** (Linearisierung im Arbeitspunkt mit grafischer Bestimmung der Steigung)

Ein nichtlinearer Widerstand mit der Kennlinie  $I = 100 \text{ mA} \cdot (U/1 \text{ V})^2$  wird in Durchlaßrichtung von einer Spannungsquelle über einen Widerstand  $R = 25 \Omega$  betrieben. Bestimmen Sie Ströme  $I$  und Spannungen  $U$  nach der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt" grafischer Bestimmung der Steigung. Der Arbeitspunkt ist mit  $U_q = 2.4 \text{ V}$  zu wählen.

**Lösungsweg:**

Arbeitspunkt A bestimmen wie Beispiel 1.A

Ablese aus Diagramm:  $\Delta U = 0.6 \text{ V}$   $\Delta I = 96 \text{ mA}$

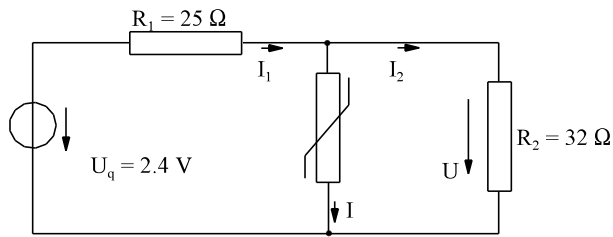
Tangente im Arbeitspunkt A einzeichnen und Steigung im Arbeitspunkt A bestimmen:

$$r = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{0.6 \text{ V}}{0.096 \text{ A}} = 6.25 \Omega$$

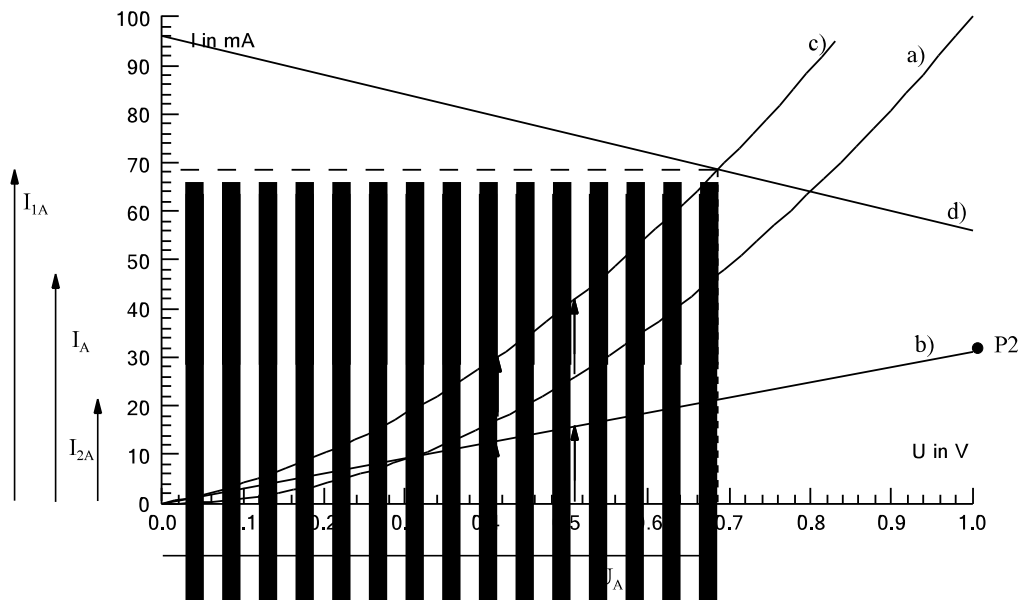
weitere Berechnung wie Beispiel 1.C.

**Beispiel 2.A:** (grafische Parallelschaltung)

Ein nichtlinearer Widerstand in Durchlaßrichtung mit der Kennlinie  $I = 100 \text{ mA} * (U/1 \text{ V})^2$ , parallel zu einem Widerstand  $R_2 = 32 \Omega$ , wird in Reihe zu  $R_1 = 25 \Omega$  an einer Spannungsquelle  $U_q = 2.4 \text{ V}$  betrieben.



- Die Kennlinie  $I = f(U)$  für den nichtlinearen Widerstand ist zu zeichnen (1 cm  $\triangleq$  0.1 V, 1 cm  $\triangleq$  10 mA)
- In das gleiche Diagramm ist die Kennlinie von  $R_2$  zu zeichnen.
- Die Parallelschaltung von  $R_2$  und Diode ist grafisch auszuführen.
- In das gleiche Diagramm ist die Kennlinie aus der Kombination der Spannungsquelle  $U_q$  und des Widerstandes  $R_1$  zu zeichnen.
- Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen aus dem Diagramm.

**Lösungsweg:**

- siehe Skizze
- $\Delta U = R_2 * \Delta I$  Wahl:  $\Delta U = 1 \text{ V}$   $\Delta I = -\Delta U/R_2 = 1 \text{ V}/32 \Omega = 31.25 \text{ mA}$   
 $P_1 = (0, 0)$   $P_2 = (1 \text{ V}, 31.25 \text{ mA})$
- siehe Skizze (Addition von a) und b) in I-Richtung)
- siehe Beispiel 1.Ab
- Ablesen aus Diagramm:  $U_A = 0.685 \text{ V}$   $I_{2A} = 21 \text{ mA}$   $I_A = 47 \text{ mA}$   $I_{1A} = 68 \text{ mA}$

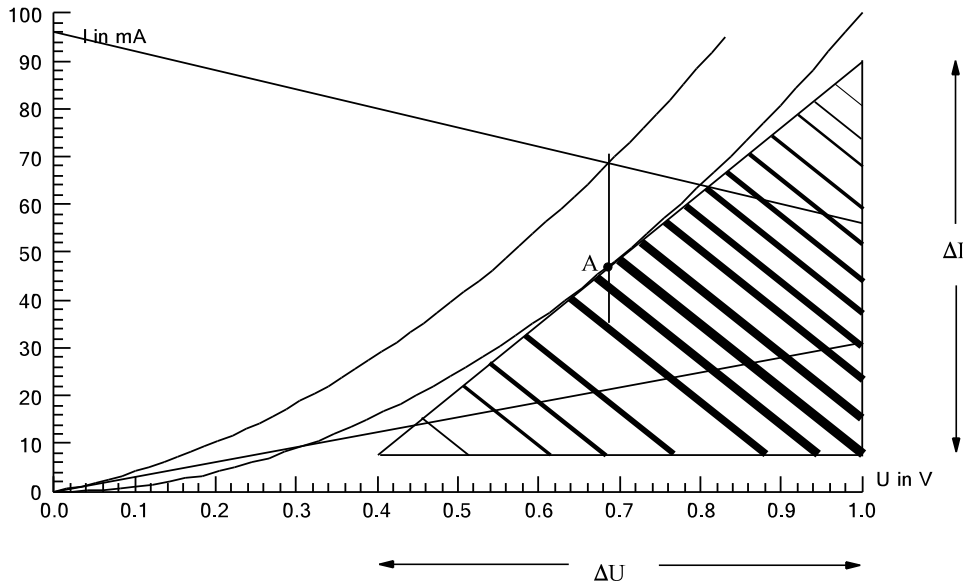
**Beispiel 2.B:**

Bestimmen Sie unter Berücksichtigung von Beispiel 2.A den Wert des Stromes I für  $U_q = 2.5 \text{ V}$  nach der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt" mit grafischer Bestimmung der Steigung.

**Lösungsweg:**

Übernahmen aus Beispiel 2.A:  $U_A = 0.685 \text{ V}$   $I_{2A} = 21 \text{ mA}$   $I_A = 47 \text{ mA}$   $I_{1A} = 68 \text{ mA}$

Tangente im Arbeitspunkt des nichtlinearen Elementes anlegen.



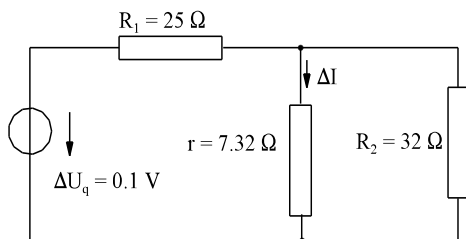
Steigung aus Skizze ablesen:

$\Delta U = 0.6 \text{ V}$

$\Delta I = 82 \text{ mA}$

$$r = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{0.6 \text{ V}}{0.082 \text{ A}} = 7.32 \Omega$$

linearisiertes ESB



$$\Delta I = \frac{\Delta U_q}{R_1 + r \parallel R_2} * \frac{R_2}{r + R_2} = \frac{0.1 \text{ V}}{25 \Omega + 5.957 \Omega} * \frac{32 \Omega}{7.32 \Omega + 32 \Omega} = 2.63 \text{ mA}$$

$r \parallel R_2 = 5.957 \Omega$

$I = I_A + \Delta I = 47 \text{ mA} + 2.63 \text{ mA} = 49.6 \text{ mA}$



**Beispiel 2.C:**

Bestimmen Sie Für  $U_q = 2.5 \text{ V}$  den Wert des Stromes aus Beispiel 2.A exakt.

$$I = 100 \text{ mA} * \left( \frac{U}{1\text{V}} \right)^2 \quad I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$I_1 = I + I_2 = 100 \text{ mA} * \left( \frac{U}{1\text{V}} \right)^2 + \frac{U}{R_2}$$

$$U_1 = R_1 * I_1 = R_1 * 100 \text{ mA} * \left( \frac{U}{1\text{V}} \right)^2 + \frac{R_1}{R_2} * U$$

$$U_q = U_1 + U = R_1 * 100 \text{ mA} * \left( \frac{U}{1\text{V}} \right)^2 + \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) * U$$

$$2.5 \text{ V} = 25 \Omega * 100 \text{ mA} * \left( \frac{U}{1\text{V}} \right)^2 + \left( \frac{25 \Omega}{32 \Omega} + 1 \right) * U$$

$$0 = \left( \frac{U}{1\text{V}} \right)^2 + \frac{25}{32} + 1 * \left( \frac{U}{1\text{V}} \right) - \frac{2.5 \text{ V}}{25 \text{ V}}$$

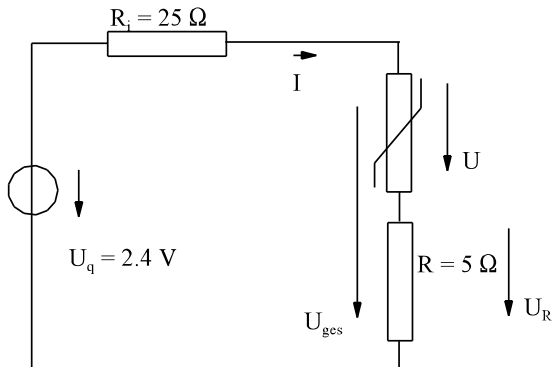
$$\left( \frac{U}{1\text{V}} \right)^2 + 0.7125 * \left( \frac{U}{1\text{V}} \right) - 1 = 0$$

$$U = 1\text{V} * \left[ -\frac{0.7125}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{0.7125}{2} \right)^2 + 1} \right] = 0.7053 \text{ V}$$

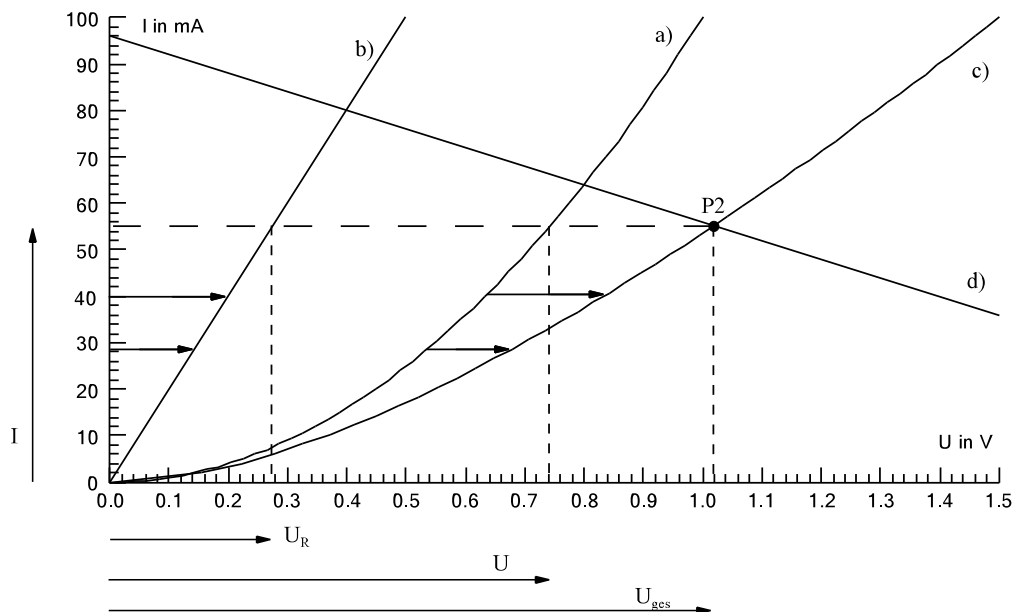
$$I = 100 \text{ mA} * \left( \frac{0.7053 \text{ V}}{1\text{V}} \right)^2 = 49.75 \text{ mA}$$

**Beispiel 3** (grafische Reihenschaltung)

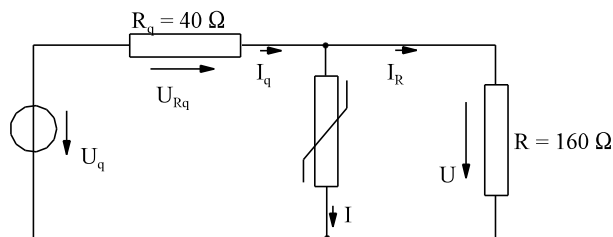
Ein nichtlinearer Widerstand in Durchlaßrichtung mit der Kennlinie  $I = 100 \text{ mA } (U/1\text{V})^2$ , in Reihe mit einem Widerstand  $R = 5 \Omega$ , wird an einer Spannungsquelle  $U_q = 2.4 \text{ V}$  mit Innenwiderstand  $R_i = 25 \Omega$  angeschlossen.



- Zeichnen Sie die Kennlinie des nichtlinearen Widerstandes  $I = f(U)$ . ( $1 \text{ cm} \triangleq 0.1 \text{ V}$ ,  $1 \text{ cm} \triangleq 10 \text{ mA}$ )
- Die Kennlinie des Widerstandes  $R$  ist in das gleiche Diagramm zu zeichnen.
- Die Reihenschaltung von Diode und Widerstand  $R$  ist grafisch auszuführen.
- Die Kennlinie der Quelle mit Innenwiderstand ist in das gleiche Diagramm einzutragen.
- Alle Ströme und Spannungen sind grafisch zu bestimmen.

**Lösungsweg:**

- siehe Skizze
1. Wahl:  $\Delta U = 1 \text{ V}$   $\Delta I = 1 \text{ V} / 5 \Omega = 200 \text{ mA}$   $\Rightarrow I$  zu groß  
2. Wahl:  $\Delta I = 100 \text{ mA}$   $\Delta U = 5 \Omega * 100 \text{ mA} = 0.5 \text{ V}$
- siehe Skizze (Addition von a) und b) in U-Richtung)
- siehe Beispiel 1.A.b
- Ablesen aus Diagramm:  $I = 55 \text{ mA}$   $U_R = 0.28 \text{ V}$   $U = 0.74 \text{ V}$   $U_{\text{ges}} = 1.02 \text{ V}$

**Beispiel 4:**

Ein VDR wird zur Vermeidung von Überspannungen laut ESB eingesetzt. Die Kennlinie des VDR wird durch

$$U = C * \left( \frac{I}{1A} \right)^\beta \quad \text{mit } C = 20 \text{ V} \quad \text{und } \beta = 0.25$$

beschrieben.. Bestimmen Sie die Ausgangsspannung U für:

- a)  $U_q = 6 \text{ V}$  (Normalbetrieb)  
 b)  $U_q = 1 \text{ kV}$  (200 fache Überspannung)

**Lösungsweg:**

$$U = C * \left( \frac{I}{1A} \right)^{0.25} \quad \left( \frac{U}{C} \right)^4 = \frac{I}{1A} \quad I = 1A \left( \frac{U}{C} \right)^4$$

$$I_R = \frac{U}{R}$$

$$I_q = I + I_R = \frac{U}{R} + 1A * \left( \frac{U}{C} \right)^4$$

$$U_{Rq} = R_q * I_q = \frac{R_q}{R} * U + R_q * 1A * \left( \frac{U}{C} \right)^4$$

$$U_q = U_{Rq} + U = \frac{R_q}{R} * U + R_q * 1A * \left( \frac{U}{C} \right)^4 + U * \left( 1 + \frac{R_q}{R} \right)$$

$$R_q * 1A = 40 \text{ V}$$

$$40V * \left( \frac{U}{20V} \right)^4 + \left( 1 + \frac{40\Omega}{160\Omega} \right) * U - U_q = 0$$

$$\left( \frac{U}{20V} \right)^4 + \frac{1.25 * 20V}{40V} * \frac{U}{20V} - \frac{U_q}{40V} = 0$$

$$\frac{1.25 * 20V}{40V} = 0.625$$

$$x = \frac{U}{20V}$$

$$k = \frac{U_q}{40V}$$

$$x^4 + 0.625x - k = 0$$

(A)

$$\text{a) } k_a = \frac{6V}{40} = 0.15$$

$$\text{b) } k_b = \frac{1000V}{40} = 25$$

Numerische Lösung von (A):

$$\text{a) } x = 0.2351 \quad U = x * 20 \text{ V} = 4.702 \text{ V}$$

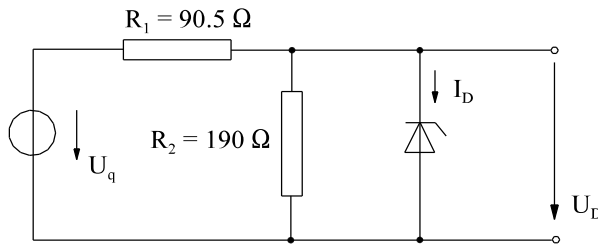
$$\text{b) } x = 2.2046 \quad U = 44.1 \text{ V}$$

Ohne VDR würde sich ergeben:

$$\text{a) } U = 5 \text{ V}$$

$$\text{b) } U = 750 \text{ V}$$

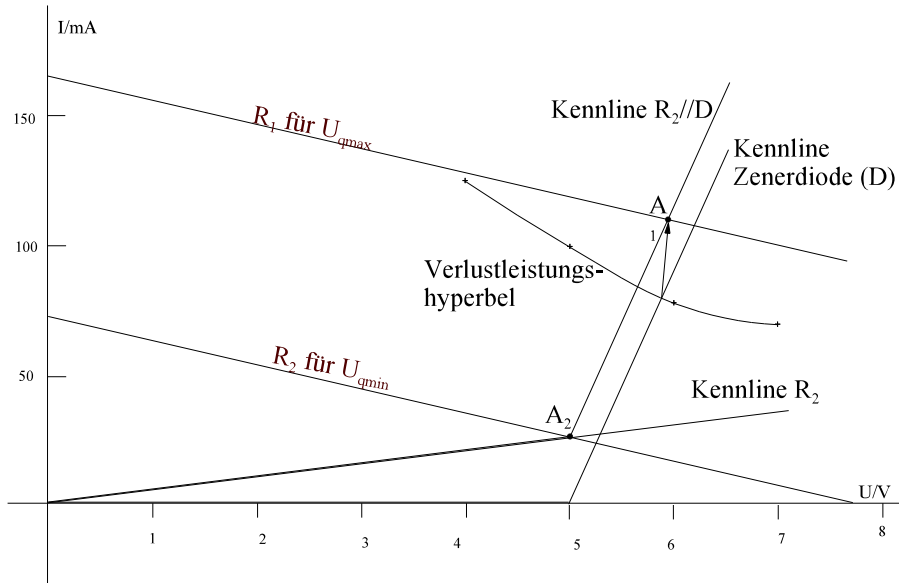
**Beispiel 5.A:** Die Spannung am Widerstand  $R_2$  der unten dargestellten Schaltung soll mit Hilfe einer Zener-Diode stabilisiert werden. Die Daten der Zener-Diode sind durch eine lineare Ersatzschaltung gegeben:  $U_Z = 5\text{ V}$   $r_Z = 10\ \Omega$   $P_{\max} = 500\text{ mW}$



Schätzen Sie grafisch die minimale und maximale Spannung  $U_q$  ab, mit der sich die Spannung  $U_2$  mit Hilfe der Zenerdiode stabilisieren lässt.

Hinweis: In der Praxis wäre bei einer Zener-Diode die Steigung größer ( $r_Z$  kleiner).

**Lösungsweg:**



**Abschätzung Maßstab:**  $U_D \approx 5\text{ V}$   $I_{\max} \approx \frac{0.5\text{ W}}{5\text{ V}} = 100\text{ mA}$

**Konstruktion der Kennlinie Zenerdiode:**

$r_Z = \frac{\Delta U}{\Delta I}$  gewählt  $\Delta I = 100\text{ mA}$   $\Delta U = r_Z * \Delta I = 10\ \Omega * 0.1\text{ A} = 1\text{ V}$

**Konstruktion der Kennlinie  $R_2$ :**

$R_2 = \frac{\Delta U}{\Delta I}$  gewählt  $\Delta U = 3.8\text{ V}$   $\Delta I = \frac{\Delta U}{R_1} = \frac{3.8\text{ V}}{190\ \Omega} = 20\text{ mA}$

**Verlustleistungshyperbel:**  $I = \frac{P}{U} = \frac{500\text{ mW}}{U}$

$U = 4\text{ V}$	$I = 125\text{ mA}$
$U = 5\text{ V}$	$I = 100\text{ mA}$
$U = 6\text{ V}$	$I = 83\text{ mA}$
$U = 7\text{ V}$	$I = 71\text{ mA}$

$A_1$  - Arbeitspunkt mit maximalem Strom  $A_2$  - Arbeitspunkt mit minimalem Strom

**Konstruktion der Kennlinie  $R_1$ :**

$R_1$  durch  $A_1$  bzw.  $A_2$   $R_1 = \frac{\Delta U}{\Delta I}$  gewählt  $\Delta U = 5\text{ V}$

$\Delta I = \frac{\Delta U}{R_1} = \frac{3.8\text{ V}}{190.5\ \Omega} = 55\text{ mA}$

**Ablese aus Diagramm:**  $U_{q\min} \approx 7.6\text{ V}$   $\frac{U_{q\max}}{R_1} \approx 165\text{ mA}$   $U_{q\min} \approx 165\text{ mA} * 90.5\ \Omega = 15\text{ V}$

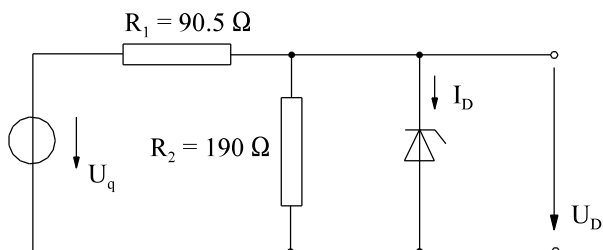
**Beispiel 5.B:**

Die Spannung am Widerstand  $R_2$  der unten dargestellten Schaltung soll mit Hilfe einer Zener-Diode stabilisiert werden. Die Daten der Zener-Diode sind durch eine lineare Ersatzschaltung gegeben:

$$U_Z = 5 \text{ V} \quad r_Z = 10 \text{ } \Omega \quad P_{\max} = 500 \text{ mW}$$

Hinweis: In der Praxis wäre bei einer Zener-Diode die Steigung größer ( $r_Z$  kleiner).

- Berechnen Sie allgemein:  $U_D = f(U_q)$ ,  $I_D = f(U_q)$ ,  $P_D = f(U_q)$
- Bestimmen Sie die Werte unter a) für  $U_q = 20 \text{ V}$ ,
- Bestimmen Sie die Werte unter a) für  $U_q = 10 \text{ V}$ .
- Bestimmen Sie den zulässigen Bereich von  $U_q$ .



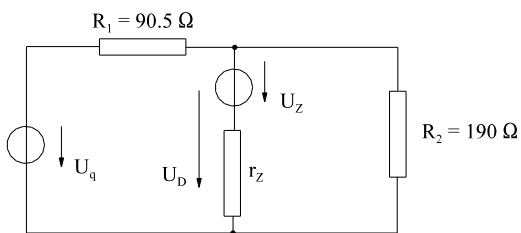
**gegeben:**  $U_q$   $R_1 = 90.5 \text{ } \Omega$   $R_2 = 190 \text{ } \Omega$   
 $U_Z = 5 \text{ V}$   $r_Z = 10 \text{ } \Omega$   $P_{\max} = 500 \text{ mW}$

**Lösungsweg:**

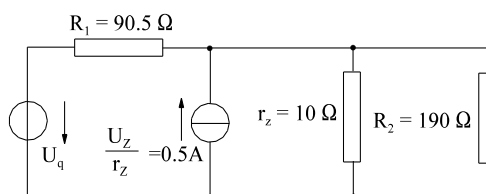
- Berechnen Sie allgemein:

$$U_D = f(U_q), I_D = f(U_q), P_D = f(U_q)$$

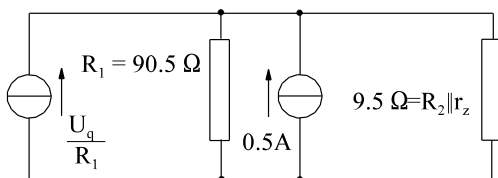
1.



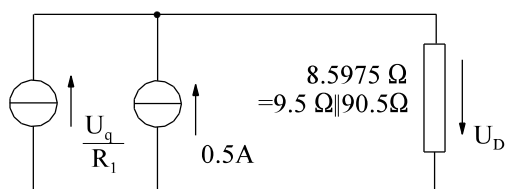
2.



3.



4.



$$U_D = \left( \frac{U_q}{90.5 \Omega} + 0.5 \text{ A} \right) * 8.5975 \Omega$$

$$U_D = U_q * 0.095 + 4.29875 \text{ V}$$

$$I_D = (U_D - U_Z) * \frac{1}{r_Z} = \frac{U_q * 0.095 + 4.29875 \text{ V} - 5 \text{ V}}{10 \Omega}$$

$$I_D = \frac{1}{10 \Omega} (U_q * 0.095 - 0.70125 \text{ V})$$

$$I_D = \frac{U_q}{105.3 \Omega} - 0.07013 \text{ A}$$

$$P_D = U_D * I_D = (U_q * 0.095 + 4.29875 \text{ V}) * \frac{1}{10 \Omega} (U_q * 0.095 - 0.70125 \text{ V})$$

$$P_D = \frac{1}{10 \Omega} \left[ (U_q * 0.095)^2 + (U_q * 0.095) * 3.5975 \text{ V} - 3.0145 \text{ V}^2 \right]$$

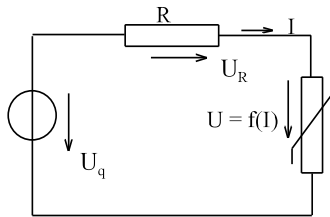
$$P_D = \frac{1}{1108 \Omega} \left[ U_q^2 + 37.868 \text{ V} * U_q - 334.02 \text{ V}^2 \right]$$

b)	Bestimmen Sie die Werte unter b) für $U_q = 20 \text{ V}$
	$U_D(20 \text{ V}) = 20 \text{ V} \cdot 0.095 + 4.29875 = 6.198775 \text{ V}$ $I_D(20 \text{ V}) = \frac{6.198775 \text{ V} - 5 \text{ V}}{10 \Omega} = 0.1198775 \text{ A}$ $P_D(20 \text{ V}) = 0.743 \text{ W}$
c)	Bestimmen Sie die Werte unter b) für $U_q = 10 \text{ V}$
	$U_D(10 \text{ V}) = 5.24875 \text{ V}$ $I_D(10 \text{ V}) = 0.024875 \text{ A}$ $P_D(10 \text{ V}) = 0.13056 \text{ W}$
d)	Bestimmen Sie den zulässigen Bereich von $U_q$
	Untergrenze: $I_D = 0 \Rightarrow U_q \cdot 0.095 - 0.70125 \text{ V} = 0 \quad U_q = \frac{0.70125 \text{ V}}{0.095} = 7.382 \text{ V}$
	Obergrenze: $P_D = 500 \text{ mW} = \frac{1}{1108 \Omega} [U_q^2 + 37.868 \text{ V} \cdot U_q - 334.02 \text{ V}^2]$ $U_q^2 + 37.868 \text{ V} \cdot U_q - 334.02 \text{ V}^2 - 0.5 \text{ VA} \cdot 1108 \Omega = 0 \quad 334.02 \text{ V}^2 + 0.5 \text{ VA} \cdot 1108 \Omega = 888.02 \text{ V}^2$ $U_q = -18.934 \text{ V} + \sqrt{(18.934 \text{ V})^2 + 888.02 \text{ V}^2} = 16.37 \text{ V}$

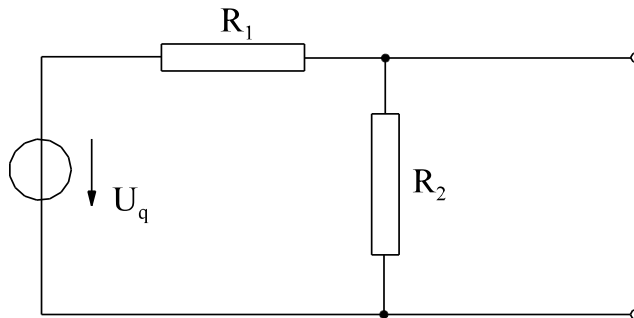
Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.5.2.A</b>	Bei der grafischen Reihenschaltung werden im Kennlinienfeld addiert: * Ströme * Spannungen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.B</b>	Bei der grafischen Parallelschaltung werden im Kennlinienfeld addiert: * Ströme * Spannungen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.C</b>	Bei der Methode "Polynomannäherung" wird: * die Kennlinie des nichtlinearen Elementes durch ein Polynom angenähert * die Lösung (Strom oder Spannung) durch ein Polynom angenähert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.D</b>	Bei der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt" wird die Kennlinie des nichtlinearen Elementes ersetzt durch: * ein Polynom 2. oder höherer Ordnung * eine Gerade durch Null und durch dem Arbeitspunkt * eine Gerade durch den Arbeitspunkt als Tangente * irgendeine Gerade durch den Arbeitspunkt * durch Abschnitte von Geraden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.E</b>	Bei der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt" werden: * absolute Größen berechnet * Abweichungen vom Arbeitspunkt betrachtet	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.F</b>	Die Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt" ist besonders gut geeignet bei: * starker Nichtlinearität * schwacher Nichtlinearität * kleiner Abweichung vom Arbeitspunkt * großer Abweichung vom Arbeitspunkt * im gesamten Arbeitsbereich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.G</b>	Der Fehler bei der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt": * erhöht sich mit der Abweichung vom Arbeitspunkt * verringert sich mit der Abweichung vom Arbeitspunkt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.5.3.H</b>	Das linearisierte ESB bei der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt" eignet sich um: <ul style="list-style-type: none"> <li>* den Arbeitspunkt zu bestimmen</li> <li>* die Abweichung vom Arbeitspunkt zu bestimmen</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.B</b>	Geben Sie die Reihenfolge der Schritte bei der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt": <ul style="list-style-type: none"> <li>* Abweichungen vom Arbeitspunkt berechnen</li> <li>* Steigung der Kennlinie im Arbeitspunkt bestimmen</li> <li>* Arbeitspunkt bestimmen</li> </ul>	___.	___.

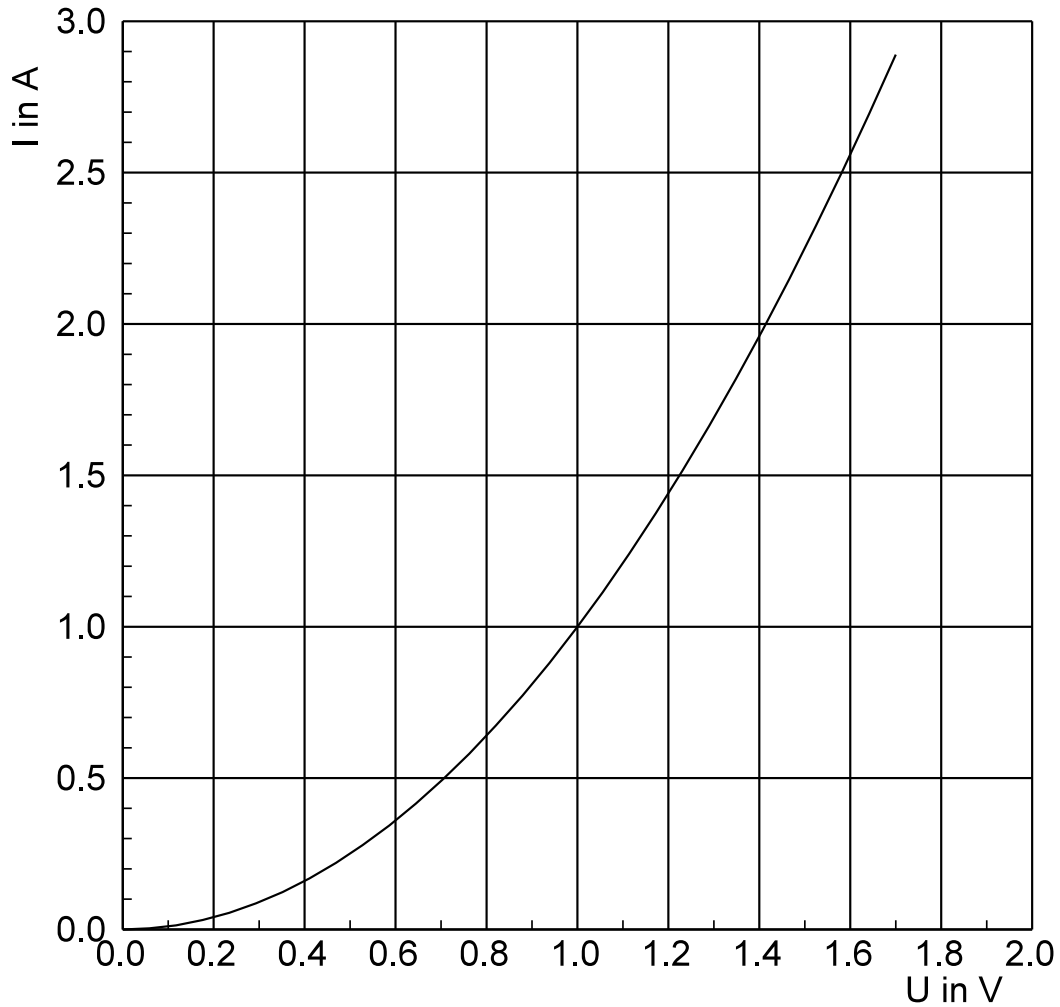
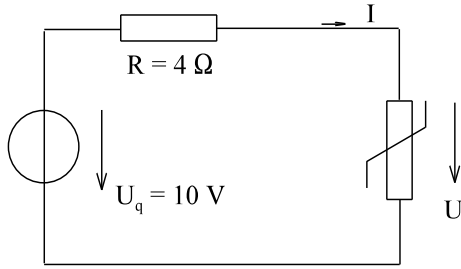
- Frage 5.2.A** a) Geben Sie für die dargestellte nichtlineare Schaltung das linearisierte ESB an.  
b) Wie bestimmt man den Wert der das nichtlineare Element repräsentiert? Geben Sie eine Formel an:



- Frage 5.2.B** Die Spannung am Verbraucher  $R_2$  schwankt, weil die Spannung  $U_q$  schwankt. Ergänzen Sie die Schaltung, damit diese Schwankung an  $R_2$  erheblich verringert werden.



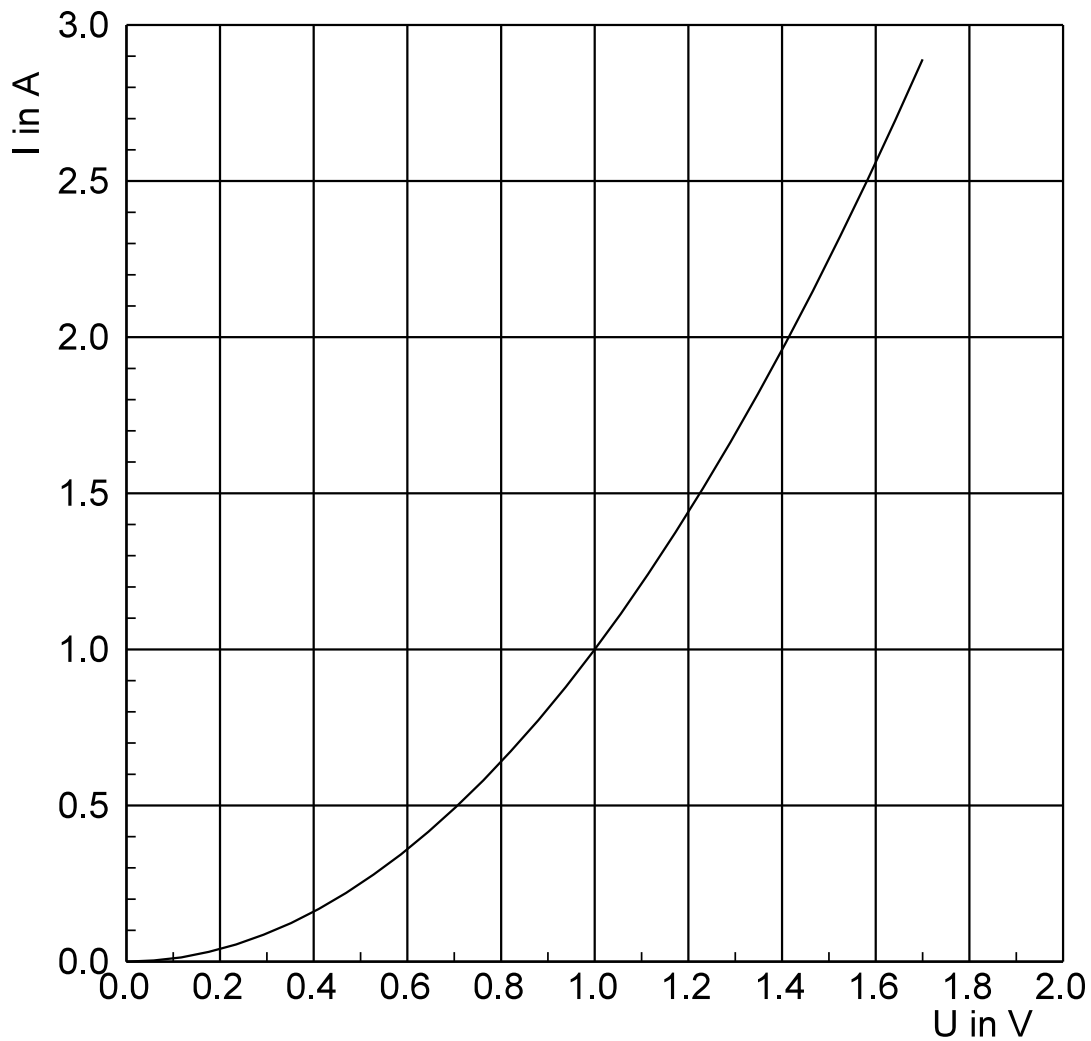
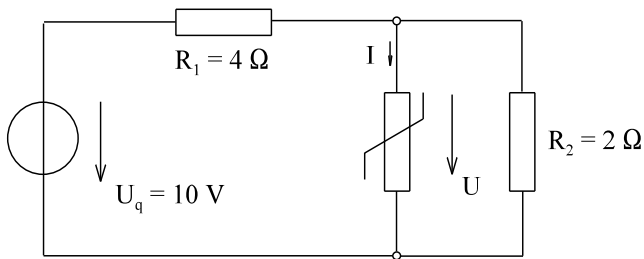
**Aufgabe 5.2.A** Bestimmen Sie die Arbeitspunktgrößen ( $U_A, I_A$ ) des nichtlinearen Widerstandes grafisch.



**Aufgabe 5.2.B:** Bestimmen Sie den Strom  $I$  der Aufgabe 5.2.A für eine Quellspannung  $U_q = 12 \text{ V}$  nach der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt. Bestimmen Sie die Steigung grafisch, nachdem Sie die Aufgabe 5.2.A gelöst haben. Übernehmen Sie alle notwendigen Daten aus der Berechnung der Aufgabe 5.2.A.

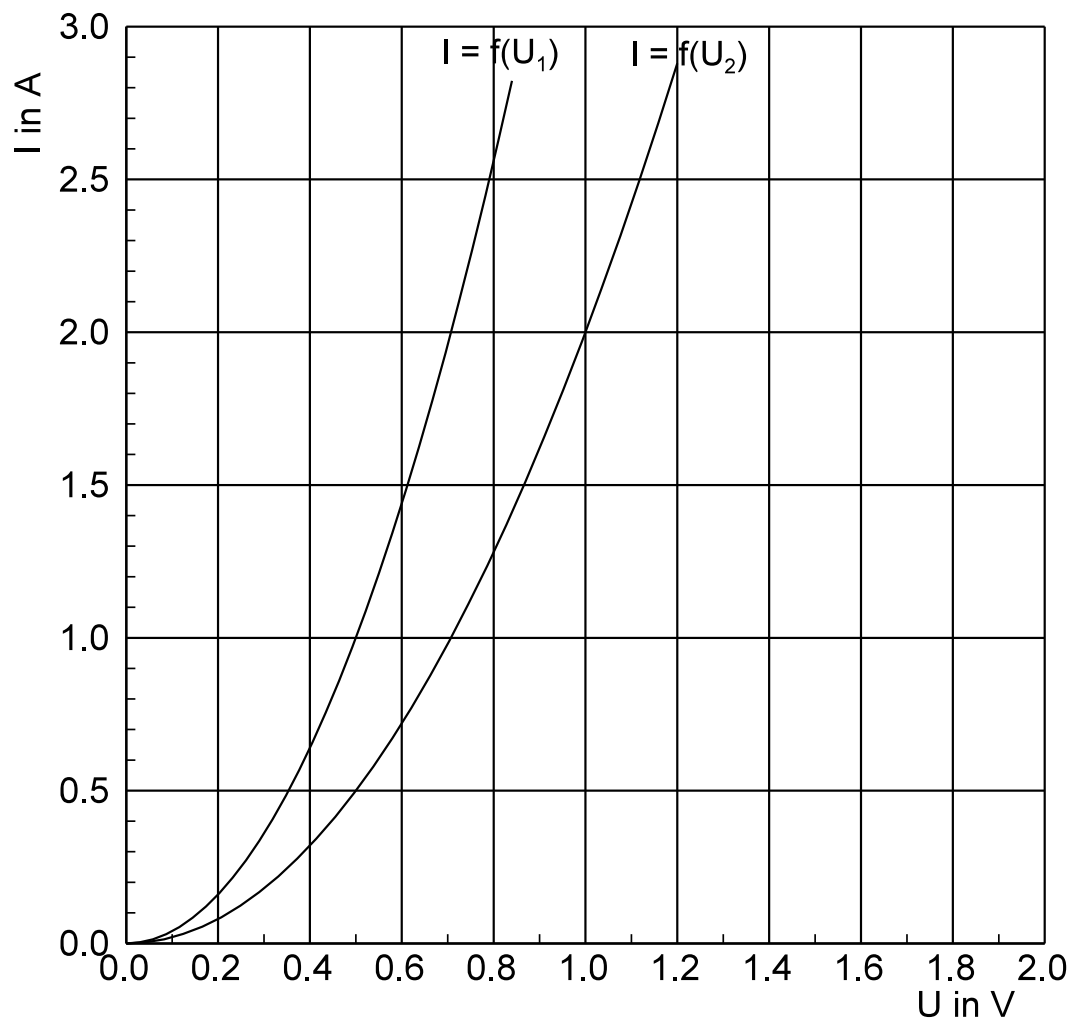
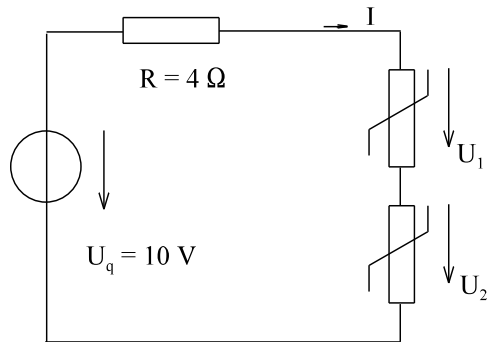


**Aufgabe 5.2.C** Bestimmen Sie die Arbeitspunktgrößen ( $U$ ,  $I$ ) des nichtlinearen Widerstandes (!!! nicht der Parallelschaltung !!!!) grafisch.



**Aufgabe 5.2.D:** Bestimmen Sie den Strom  $I$  der Aufgabe 5.2.C für eine Quellspannung  $U_q = 12$  V nach der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt. Bestimmen Sie die Steigung grafisch, nachdem Sie die Aufgabe 5.2.C gelöst haben. Übernehmen Sie alle notwendigen Daten aus der Berechnung der Aufgabe 5.2.C.

**Aufgabe 5.2.E** Bestimmen Sie die Arbeitspunktgrößen ( $I$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ ) der nichtlinearen Widerstände (!!! nicht der Reihenschaltung !!!) grafisch.



**Aufgabe 5.2.F:** Bestimmen Sie den Strom  $I$  der Aufgabe 5.2.E für eine Quellspannung  $U_q = 12 \text{ V}$  nach der Methode "Linearisierung im Arbeitspunkt. Bestimmen Sie die Steigung grafisch, nachdem Sie die Aufgabe 5.2.E gelöst haben. Übernehmen Sie alle notwendigen Daten aus der Berechnung der Aufgabe 5.2.E.

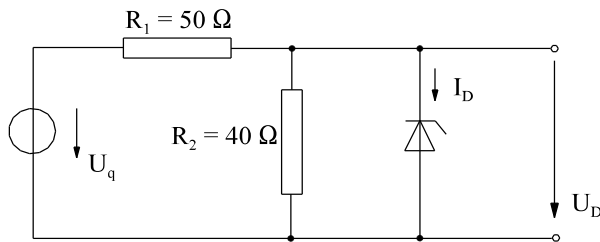
**Aufgabe 5.2.G**

Die Spannung am Widerstand  $R_2$  der unten dargestellten Schaltung soll mit Hilfe einer Zener-Diode stabilisiert werden. Die Daten der Zener-Diode sind durch eine lineare Ersatzschaltung gegeben:

$$U_Z = 10 \text{ V}$$

$$r_Z = 2 \text{ } \Omega$$

$$P_{\max} = 8 \text{ W}$$



Schätzen Sie grafisch die minimale und maximale Spannung  $U_q$  ab, mit der sich die Spannung  $U_2$  mit Hilfe der Zenerdiode stabilisieren lässt.

Hinweis: In der Praxis wäre bei einer Zener-Diode die Steigung größer ( $r_Z$  kleiner).

**Aufgabe 5.2.H**

Die Spannung am Widerstand  $R_2$  der unten dargestellten Schaltung soll mit Hilfe einer Zener-Diode stabilisiert werden. Die Daten der Zener-Diode sind durch eine lineare Ersatzschaltung gegeben:

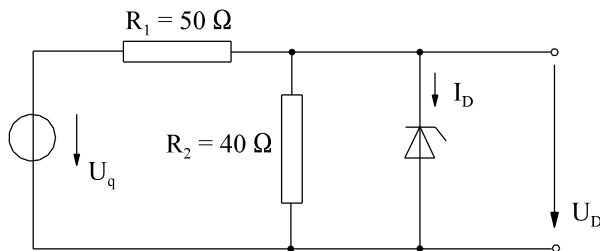
$$U_Z = 10 \text{ V}$$

$$r_Z = 2 \text{ } \Omega$$

$$P_{\max} = 8 \text{ W}$$

Hinweis: In der Praxis wäre bei einer Zener-Diode die Steigung größer ( $r_Z$  kleiner).

- Berechnen Sie allgemein:  $U_D = f(U_q)$ ,  $I_D = f(U_q)$ ,  $P_D = f(U_q)$
- Bestimmen Sie die Werte unter a) für  $U_q = 30 \text{ V}$ ,
- Bestimmen Sie den zulässigen Bereich von  $U_q$ .



## 5.3. Thermoelektrische Erscheinungen

### 5.3.1. Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

#### 5.3.1.1. Metalle und Halbleiter

Wiederholung:

$$\rho(T) = \frac{1}{\kappa(T)}$$

$$R = \rho(T) * \frac{l}{A} = \frac{l}{\kappa(T) * A}$$

$$\vec{J} = \kappa(T) * \vec{E}$$

Zur Diskussion der Temperaturabhängigkeit des Widerstandes reicht es aus, die Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes (bzw. der spezifischen Leitfähigkeit) zu behandeln, weil sich die Abmessungen nur geringfügig ändern.

Wiederholung aus Kap. 5.1.3:

$$\kappa = q * n * b$$

$$\kappa(T) = q * n(T) * b(T)$$

Der elektrische Widerstand ist somit abhängig von:

- n(T)                      - Anzahl der freien Ladungsträger
- b(T)                      - Beweglichkeit der freien Ladungsträger

**Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Metallen:**

$$n = \text{const}$$

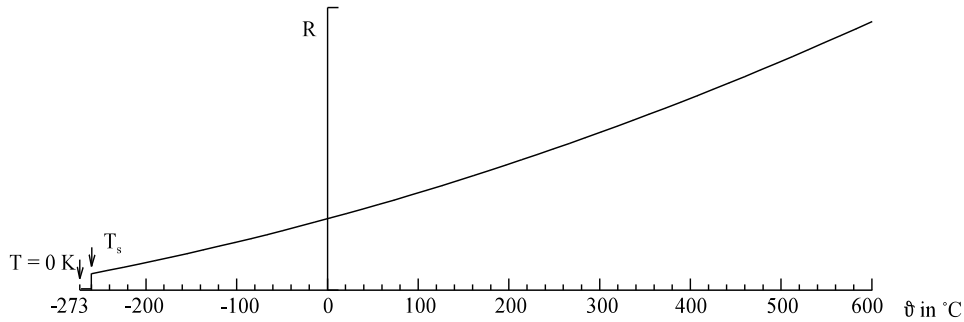
$$n \neq f(T)$$

$$b = f(T)$$

Bei Metallen stehen unabhängig von der Temperatur alle Ladungsträger des Valenzbandes zur Verfügung. Die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit ist somit nur durch die Beweglichkeit der Valenz-Elektronen bedingt. Die Beweglichkeit wird von den Gitterschwingungen der Atomkerne beeinflusst. Höhere Temperaturen und somit thermische Energie bewirken größere Gitterschwingungen. Vermehrte Gitterschwingungen bewirken eine höhere Anzahl von Stößen und schränken somit die Beweglichkeit ein. Die Leitfähigkeit wird geringer und der Widerstand steigt. Bei der absoluten Temperatur  $T = 0$  sind keine thermische Energien und keine Gitterschwingungen vorhanden. Somit steht den Elektronen kein Widerstand mehr entgegen, der Widerstand wird Null, der Leitwert, die Beweglichkeit, die spezifische Leitfähigkeit werden unendlich. Hier spricht man dann von Supraleitung, die auch noch bei geringen Temperaturen (absolut in K) vorhanden bleibt, siehe auch Bild EG5311A. Das Temperaturverhalten des Widerstandes von Metallen ist in Bild EG5311A aufgezeigt. Wird die Temperatur verringert, verringert sich der Wert des Widerstandes sprunghaft von einem endlichem Wert auf Null. Man spricht von der sogenannten Sprungtemperatur  $T_s$ , bei der die Supraleitung einsetzt.

**$T_s$  - Sprungtemperaturen verschiedener Metalle**      ( $T/K = \vartheta/^{\circ}\text{C} + 273$ )

AL	1.14 K
Zinn	3.69 K
Hg	4.17 K
Blei	7.27 K
Niob	9.20 K
Niobnitrid	20.00 K

Bild EG5311A: Widerstand von Metallen als Funktion der Temperatur,  $T_s$ -Sprungtemperatur**Zusammenfassung der Temperaturabhängigkeit von Metallen:**

- A]  $T \rightarrow 0$       =>    Supraleiter  
                              =>     $R, \rho = 0$   
                              =>     $G, b, \kappa \rightarrow \infty$

B] Mit der Temperatur steigt auch der Widerstand.

Die Funktion des Widerstandes nach Bild EG5311A ist analytisch schwer zu beschreiben. Eine Annäherung des Widerstandes, bzw des spezifischen Widerstandes, ist mit Hilfe von Geraden und Parabeln 2. Ordnung üblich:

$$R(\vartheta) = R_{20} * [1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20 \text{ }^\circ\text{C})] \quad \text{Gerade}$$

$$R(\vartheta) = R_{20} * [1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20 \text{ }^\circ\text{C}) + \beta_{20}(\vartheta - 20 \text{ }^\circ\text{C})^2] \quad \text{quadratische Parabel}$$

Die Daten  $\alpha_{20}$  und  $\beta_{20}$  von verschiedenen Materialien sind schon in Abschnitt 2.2.3 angegeben worden. Welche Gleichung ist zu verwenden? Antwort: Dieses ist vom Temperaturbereich abhängig. In Bild EG5311B ist der spezifische Widerstand von Kupfer in Abhängigkeit der Temperatur dargestellt. Im Temperaturbereich zwischen  $-100 \text{ }^\circ\text{C}$  und  $+150 \text{ }^\circ\text{C}$  treten keine großen Unterschiede zwischen Gerade und quadratischer Form auf. In diesem Bereich kann die Geradenfunktion benutzt werden.

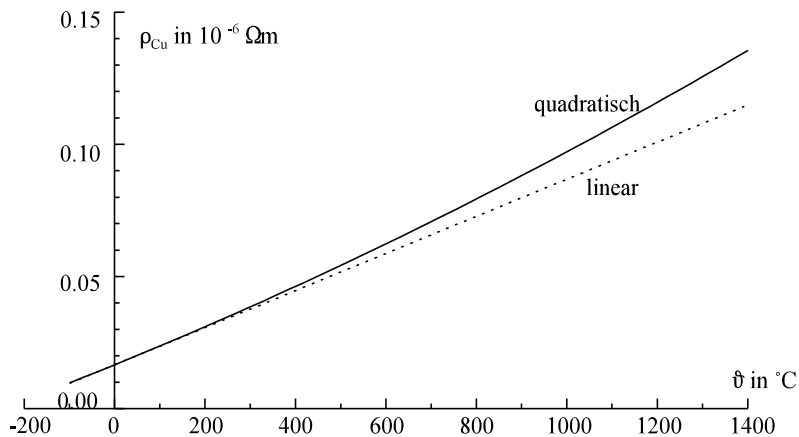


Bild EG5311B: Spezifischer Widerstand von Kupfer

Die Bedeutung der Geradenfunktion zeigt Bild EG5311C. Der Wert  $R_{20}$  gibt den Widerstand bei  $\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  an:

$$R_{20} = R(\vartheta) \Big|_{\vartheta = 20^\circ\text{C}}$$

Der Temperaturbeiwert  $\alpha_{20}$  ist mit der Steigung bei  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$  verknüpft. Temperaturbeiwert  $\alpha$ :

$$R(\vartheta) = R_{20} * [1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_A)]$$

$$\frac{R(\vartheta)}{R_{20}} - 1 = \alpha(\vartheta - \vartheta_A)$$

$$\frac{dR(\vartheta)}{d\vartheta} \frac{1}{R_{20}} = \alpha$$

$$\alpha_{20} = \frac{1}{R_{20}} * \frac{dR(\vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta = 20^\circ\text{C}} = \frac{\frac{dR(\vartheta)}{d\vartheta}}{R(\vartheta)} \Big|_{\vartheta = 20^\circ\text{C}}$$

Die Geradenfunktion des Widerstandes stellt somit auch eine Linearisierung im Arbeitspunkt ( $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ ) dar, vergleiche Abschnitt 5.2.5 (Linearisierung der U-I-Kennlinie).

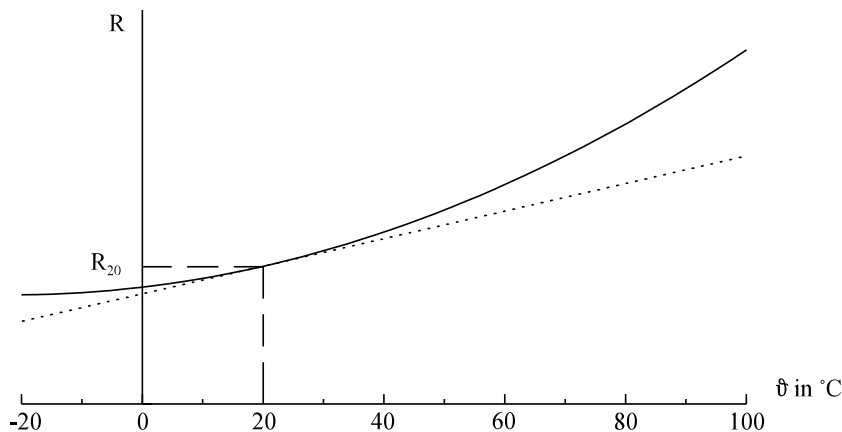


Bild EG5311C: Linearisierung des Widerstandes

### Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Halbleitern

Zur Erinnerung:  $\kappa = q * n(T) * b(T)$

Die Anzahl der zur Verfügung stehenden Ladungsträger im Halbleiter ist nach einer Näherungsformel (siehe Abschnitt 5.1.4.1) stark von der Temperatur abhängig:

$$n = A * e^{-\frac{\Delta W}{kT}} \quad kT_0 = 0.026 \text{ eV}$$

Aus der oberen Gleichung lässt sich ablesen:

$T \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$ , die Anzahl der Ladungsträger geht gegen Null  
 $T$  wird größer  $\Rightarrow$  erheblich mehr Ladungsträger stehen zur Verfügung (e-Funktion).

Die Beweglichkeit der Ladungsträger in Halbleitern ist schwach von der Temperatur abhängig:

$$b(T) \approx C * T^{-(1.6...2.3)}$$

$$b(T) \approx C * \frac{1}{T^2}$$

Da die e-Funktion erheblich größeren Einfluss hat als die Potenzfunktion, überwiegt beim Einfluss auf die Leitfähigkeit beim Halbleiter die Anzahl der Ladungsträger im Leitungsband. Damit weisen Halbleiter folgende Eigenschaften auf:

$T = 0 \Rightarrow$  Halbleiter ist Isolator  
 $T \rightarrow \infty \Rightarrow$  Halbleiter ist besserer Leiter

Mit der zunehmender Temperatur nimmt der Widerstand ab ( $\alpha < 0$ ).

Mit der zunehmender Temperatur nimmt der Leitwert zu.

### 5.3.1.2. NTC und PTC Widerstände

$\alpha$  - Temperaturleitwert

$\alpha$  - Steigung der normierten Widerstandsänderung in Abhängigkeit der Temperatur

Thermistoren: Stark temperaturabhängige Widerstände

NTC - Negativer Temperatur Coeffizient  $\alpha < 0$   
 PTC - Positiver Temperatur Koeffizient  $\alpha > 0$

NTC - Heißleiter  $\vartheta = 20\text{ °C}$ , R groß  $\vartheta$  groß, R klein  
 PTC - Kaltleiter  $\vartheta = 20\text{ °C}$ , R klein  $\vartheta$  groß, R groß

#### Anwendung PTC

##### Überstrombegrenzung:

Tritt ein großer Strom auf, erwärmt sich der PTC. Dadurch erhöht sich der Widerstand. Das wiederum verringert den Strom.

##### Ölstandsfühler:

In Luft wird der PTC wenig gekühlt, aufgrund der Eigenerwärmung entsteht ein großer Widerstand. Wird der PTC von Öl umgeben, entsteht eine gute Kühlung, der PTC wird niederohmig.

#### Anwendung NTC

##### Einschaltstrombegrenzung:

Bei Reihenschaltung mit einer Lampe ( $\alpha > 0$ ) und eines NTCs ( $\alpha < 0$ ) fällt am Anfang die Spannung am NTC ab. Der NTC erwärmt sich, der NTC Widerstand wird geringer, der Strom wird größer. Die Lampe (PTC) erwärmt sich. Der Widerstand der Lampe wird größer. Zum Schluss fällt der weitaus größte Teil der Spannung an der Lampe ab.

##### Temperaturmessung:

$R = f(\vartheta)$ , starke Temperaturabhängigkeit.

##### Temperatur-Kompensation:

Die Widerstände (A:  $\alpha > 0$  B:  $\alpha < 0$ ) kompensieren den Temperatur Einfluss (siehe Abschnitt 5.3.1.3).

##### NTC-Material:

Halbleiter, Titanoxid

#### Widerstand und Temperaturbeiwert eines NTCs:

zur Erinnerung HL:  $n = A \cdot e^{-\frac{\Delta W}{kT}}$   $R \sim \frac{1}{n}$

$$R = a \cdot e^{\frac{b}{T}}$$

$$R_A = a \cdot e^{\frac{b}{T_A}}$$

$$\frac{R}{R_A} = \frac{e^{\frac{b}{T}}}{e^{\frac{b}{T_A}}} = \exp \left[ \frac{b}{T} - \frac{b}{T_A} \right] = \exp \left[ b \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_A} \right) \right]$$

$$R(\vartheta) = R_A \cdot \exp \left[ b \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_A} \right) \right]$$

$$\alpha_A = \left. \frac{d \frac{R}{R_A}}{dT} \right|_{T=T_A} = \left. \frac{d}{dT} \left\{ \exp \left[ b \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_A} \right) \right] \right\} \right|_{T=T_A}$$

$$\alpha_A = \exp \left[ b \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_A} \right) \right] \cdot \left( -\frac{b}{T^2} \right) \Big|_{T=T_A} = -\frac{b}{T_A^2}$$

Eine weitere Möglichkeit, den NTC mit Hilfe einer e-Funktion anzupassen

$$R = A * e^{B * (\vartheta - 20^\circ \text{C})} \quad (\text{A})$$

ist nur soweit physikalisch begründet, dass aufgrund der Ladungsträgergeneration mit zunehmender Temperatur der Widerstandsverlauf exponentiell ist. Die Koeffizienten A und B in (A) haben eine direkte physikalische Bedeutung. Setzt man die Temperatur  $\vartheta = 20^\circ \text{C}$  in (A) ein, erhält man:

$$R(\vartheta=20^\circ \text{C}) = A = R_{20}$$

Differenziert man (A), ergibt sich:

$$\frac{dR}{d\vartheta} = A * B * e^{B * (\vartheta - 20^\circ \text{C})} = R_{20} * B * e^{B * (\vartheta - 20^\circ \text{C})}$$

Somit erhält man:

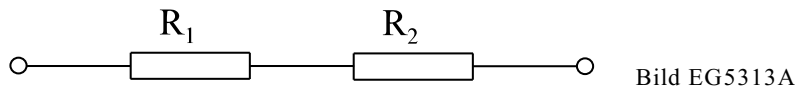
$$\alpha_{20} = \left. \frac{\frac{dR}{d\vartheta}}{R_{20}} \right|_{\vartheta=20^\circ \text{C}} = \frac{R_{20} * B * e^0}{R_{20}} = B$$

Damit kann die Temperaturabhängigkeit eines NTC auch wie folgt angegeben werden:

$$R = R_{20} * e^{\alpha * (\vartheta - 20^\circ \text{C})}$$

### 5.3.1.3. Temperaturkompensation

Die Forderung der Temperaturkompensation lautet: In einem gewissen Temperaturbereich soll der Widerstand der Gesamtschaltung nach Bild EG5313A kaum von der Temperatur abhängig sein.



$$\begin{array}{ll} R_1 = f(\vartheta) & R_2 = f(\vartheta) \\ \alpha_1 > 0 & \alpha_2 < 0 \end{array}$$

**gesucht:**  $R \neq f(\vartheta)$

$$R = R_1 + R_2$$

- $\vartheta_A$  - Temperatur im Arbeitspunkt, an dem kompensiert werden soll
- $R_{1A}$  - Wert des Widerstandes 1 bei der Temperatur  $\vartheta_A$
- $R_{2A}$  - Wert des Widerstandes 2 bei der Temperatur  $\vartheta_A$
- $\alpha_1$  - Temperaturbeiwert des Widerstandes 1 bei der Temperatur  $\vartheta_A$
- $\alpha_2$  - Temperaturbeiwert des Widerstandes 2 bei der Temperatur  $\vartheta_A$

$$R_1 = R_{1A} [1 + \alpha_1 (\vartheta - \vartheta_A)] \quad R_2 = R_{2A} [1 + \alpha_2 (\vartheta - \vartheta_A)]$$

$$R = R_1 + R_2$$

$$R = R_{1A} + R_{2A} + [R_{1A} * \alpha_1 + R_{2A} * \alpha_2] [\vartheta - \vartheta_A]$$

Der obere Widerstand weist keinen Temperatureinfluss auf, wenn der temperaturabhängige Term Null wird:

$$R_{1A} * \alpha_1 + R_{2A} * \alpha_2 = 0$$

Die Kompensation ist nur möglich, wenn ein Widerstand einen positiven und der andere einen negativen Temperaturbeiwert aufweist.

**Achtung:** Wegen Nichtlinearitäten (hier wurde linearisiert) ist der Bereich der Kompensation zu überprüfen.



**Beispiel 1:**

Für Kupfer mit dem Temperaturbeiwert  $\alpha_{20} = 0.0039 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  ist der Temperaturbeiwert  $\alpha_{100}$  für  $\vartheta = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$  zu bestimmen.

**Lösungsweg:**

$$R(\vartheta) = R_{20}[1 + \alpha_{20} * (\vartheta - 20 \text{ } ^\circ\text{C})]$$

$$\frac{dR}{d\vartheta} = \alpha_{20} * R_{20} \quad \text{konstant, temperaturunabhängig}$$

$$R(\vartheta) = R_{100}[1 + \alpha_{100} * (\vartheta - 100 \text{ } ^\circ\text{C})]$$

$$\frac{dR}{d\vartheta} = \alpha_{100} * R_{100} \quad \text{konstant, temperaturunabhängig}$$

$$\alpha_{20} * R_{20} = \alpha_{100} * R_{100} \quad \text{nur bei linear von der Temperatur abhängigen Widerständen}$$

$$\alpha_{100} = \alpha_{20} * \frac{R_{20}}{R_{100}} = \alpha_{20} * \frac{R_{20}}{R_{20}[1 + \alpha_{20} * (\vartheta - 20 \text{ } ^\circ\text{C})]} = \frac{\alpha_{20}}{1 + 0.0039 * 80} = \frac{0.0039 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}{1.312}$$

$$\alpha_{\text{Cu}100} = 0.0030 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

**Beispiel 2:**

Für den NTC mit der angenäherten Kennlinie

$$R = R_{20} * e^{\alpha_{20} * (\vartheta - 20 \text{ } ^\circ\text{C})}$$

soll der Temperaturbeiwert  $\alpha_i$  für die Temperatur  $\vartheta_i$  bestimmt werden.

**Lösungsweg:**

$$R(\vartheta = \vartheta_i) = R_{20} * e^{\alpha_{20} * (\vartheta_i - 20 \text{ } ^\circ\text{C})}$$

$$\frac{dR}{d\vartheta} = \alpha_{20} * R_{20} * e^{\alpha_{20} * (\vartheta - 20 \text{ } ^\circ\text{C})}$$

$$\left. \frac{dR}{d\vartheta} \right|_{\vartheta = \vartheta_i} = \alpha_{20} * R_{20} * e^{\alpha_{20} * (\vartheta_i - 20 \text{ } ^\circ\text{C})}$$

$$\alpha_i = \frac{\left. \frac{dR}{d\vartheta} \right|_{\vartheta = \vartheta_i}}{R(\vartheta = \vartheta_i)} = \frac{\alpha_{20} * R_{20} * e^{\alpha_{20} * (\vartheta_i - 20 \text{ } ^\circ\text{C})}}{R_{20} * e^{\alpha_{20} * (\vartheta_i - 20 \text{ } ^\circ\text{C})}}$$

$$\alpha_i = \alpha_{20}$$

=> Sonderfall: Keine Abhängigkeit des Temperaturbeiwertes  $\alpha$  von Temperatur wegen des Ansatzes einer e-Funktion in dieser Weise.

**Beispiel 3:**

Zur Erinnerung:

Für den NTC mit der Kennlinie

$$R(T) = R_{20} * \exp \left[ b \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{293 \text{ K}} \right) \right]$$

ist der Temperaturbeiwert (siehe weiter vorne) temperaturabhängig:

$$\alpha = - \frac{b}{T^2}$$

Weil aber die Raumtemperatur  $T = 293 \text{ K}$  schon relativ groß ist, bedeutet dieses eine kleine Temperaturabhängigkeit.

**Hinweis 1:**

Über einen weiten Temperaturbereich treten mehr physikalische Phänomene auf, so dass für NTCs und auch PTCs eher die Kennlinie untersucht werden sollte. Im höheren Temperaturbereich können auch einige NTCs zum PTCs mutieren.

**Hinweis 2:**

Für die spezifische Leitfähigkeit eines Stoffes gilt angenähert:

$$\rho = \rho_{20} [1 + \alpha_{20} * (\vartheta - 20^\circ\text{C}) + \beta_{20} * (\vartheta - 20^\circ\text{C})^2 + \dots]$$

Oder auch für z.B. für  $\vartheta = 40^\circ\text{C}$

$$\rho = \rho_{40} [1 + \alpha_{40} * (\vartheta - 40^\circ\text{C}) + \beta_{40} * (\vartheta - 40^\circ\text{C})^2 + \dots]$$

Nach Beispiel 1 ist bei linearer Temperaturabhängigkeit der Temperaturbeiwert  $\alpha$  nicht konstant:  $\rho_{20} \neq \rho_{40}$

**Beispiel 4:**

Der Widerstand einer Cu-Spule von  $R_{20} = 680 \Omega$  soll mit einem NTC in Reihe bei  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$  kompensiert werden. Zur Verfügung stehen NTCs mit den Kennlinien

$$R = R_{20} * e^{\alpha_{20 \text{ NTC}} * (\vartheta - 20^\circ\text{C})}$$

Der Wert  $\alpha_{20 \text{ NTC}} = -0.08 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  ist vorgegeben. Bestimmen Sie den Widerstandswert  $R_{\text{NTC}}$  damit die Temperaturkompensation bei  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$  optimal ist.

**Lösungsweg:**

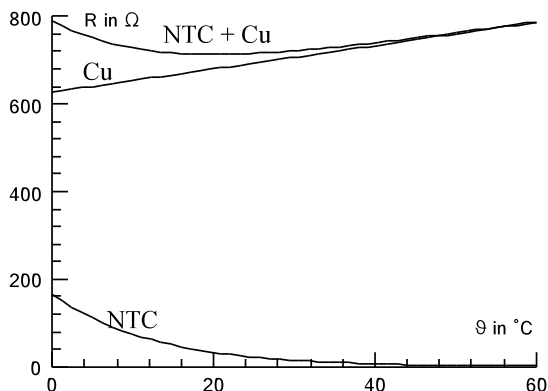
$$\alpha_{\text{Cu}20} = 0.0039 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad \text{Datenblatt}$$

$$\alpha_{20 \text{ NTC}} = -0.08 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad \text{vorgegeben}$$

$$R_{\text{Cu}20} = 680 \Omega \quad \text{vorgegeben}$$

$$\alpha_{\text{Cu}20} * R_{\text{Cu}20} + R_{\text{NTC}20} * \alpha_{\text{NTC}20} = 0$$

$$R_{\text{NTC}20} = - \frac{\alpha_{\text{Cu}20}}{\alpha_{\text{NTC}20}} * R_{\text{Cu}20} = - \frac{0.0039 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}}{-0.08 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}} * 680 \Omega = 33.15 \Omega$$

**Ergebnis:**

- Bei  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$  gute Kompensation
- Bei hohen Temperaturen:  $R_{\text{ges}} \approx R_{\text{Cu}}$
- Bei niedrigen Temperaturen ist die Kompensation schlecht, weil  $R_{\text{NTC}}$  stark ansteigt

**Beispiel 5:**

Der Widerstand einer Cu-Spule von  $R_{20} = 680 \Omega$  soll mit einem NTC in Reihe bei  $\vartheta = 80^\circ\text{C}$  kompensiert werden. Zur Verfügung stehen NTCs mit den Kennlinien

$$R = R_{20} * e^{\alpha_{20, NTC} * (\vartheta - 20^\circ\text{C})}$$

Der Wert  $\alpha_{20, NTC} = -0.02 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  ist vorgegeben. Bestimmen Sie den Widerstandswert  $R_{NTC}$  damit die Temperaturkompensation bei  $\vartheta = 80^\circ\text{C}$  optimal ist.

**Lösungsweg:**

$$R_{Cu80} = 680 \Omega * [1 + 0.0039 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} * (80^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})] = 839.1 \Omega$$

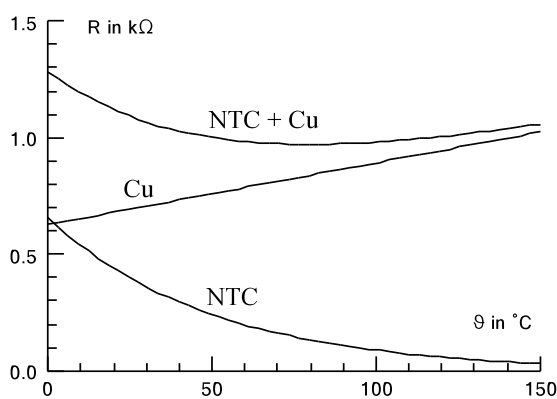
Mit Hilfe von Beispiel 1 ergibt sich:

$$\alpha_{Cu80} = \frac{\alpha_{20}}{1 + \alpha_{20} * \Delta \vartheta} = \frac{0.0039 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}}{1 + 0.0039 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} * 60^\circ\text{C}} = 0.00316 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

Mit Hilfe von Beispiel 2 (Sonderfall aufgrund der Annahme Kennlinie)

$$\alpha_{NTC80} = \alpha_{NTC20} = -0.02 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$R_{NTC80} = - \frac{\alpha_{Cu80}}{\alpha_{NTC80}} * R_{Cu80} = - \frac{0.00316 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}}{-0.02 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}} * 839.1 \Omega = 132.6 \Omega$$



Vergleich Beispiel 4 und 5:

- unterschiedliches  $\alpha_{NTC}$
- je kleiner  $\alpha_{NTC}$  vom Betrag, desto nichtlinearer
- unterschiedliche Kompensationstemperatur

**Beispiel 6:**

Eine 100 W/220 V-Glühlampe mit einer Wolframwendel hat eine Betriebstemperatur von  $2000^\circ\text{C}$ . Wie groß ist der Einschaltstrom bei  $20^\circ\text{C}$ .

gegeben:  $\alpha = 0.0041 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  aus Datenblatt  
 $\beta = 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  aus Datenblatt

**Lösungsweg:**

gegeben:  $P = 100 \text{ W}$   
 $U = 220 \text{ V}$   
 $\vartheta = 2000^\circ\text{C}$

gesucht:  $I_{20}$

$$P = \frac{U^2}{R_{2000}}$$

$$R_{2000} = \frac{U^2}{P}$$

$$R_{2000} = \frac{(220\text{V})^2}{100\text{VA}} = 484 \Omega$$

$$\Delta \vartheta = 1980^\circ\text{C}$$

$$R_{2000} = R_{20} * [1 + 1980 \text{ K} * \alpha_w + (1980 \text{ K})^2 * \beta_w]$$

$$R_{20} = \frac{R_{2000}}{1 + 1980 \text{ K} * 0.0041 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} + 1980^2 * 10^{-6}} = \frac{R_{2000}}{1 + 8.118 + 3.9204} = \frac{R_{2000}}{13.0384} = 37.121 \Omega$$

$$I_{Nenn} = \frac{220\text{V}}{484 \Omega} = 0.4545 \text{ A}$$

$$I_A = \frac{220\text{V}}{37.121 \Omega} = 5.927 \text{ A}$$

## 5.3.2. Übergang zwischen zwei Materialien

### 5.3.2.1. Seebeck-Effekt, Thermoelement

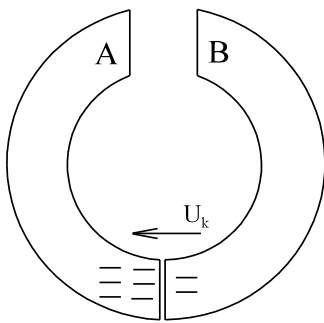


Bild EG5321A

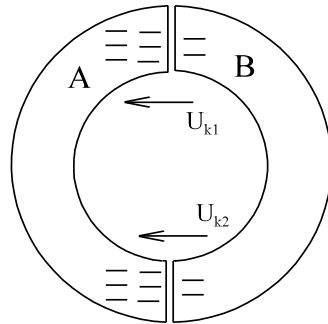


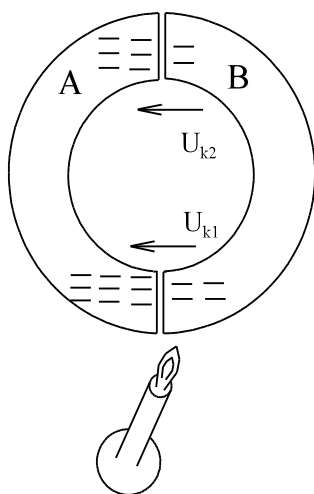
Bild EG5321B

Die Austrittsarbeit der Elektronen aus Material B ist geringer, als die aus Material A. Es wandern also mehr Elektronen von B nach A als von A nach B. Dieses ist in Bild EG5321A angedeutet durch die Elektronen, die von einem Material ins andere gewandert sind. Aufgrund unterschiedlicher Konzentrationen von Ladungen ergibt sich eine Kontakt-Spannung  $U_k$ , die vom Elektronenmangel zum Elektronenüberschuss gerichtet ist, siehe Bild EG5321A.

Was passiert, wenn man den oberen Kontakt aus Bild EG5321A auch schließt? Ergibt sich dann ein Strom aufgrund von  $U_k$ ? Die Antwort nein. Die Begründung: Nach Bild EG5321B ergeben sich zwei Kontaktstellen, die jeweils eine Kontaktspannung  $U_k$  aufweisen. Diese zwei gleich großen Spannungen sind aber in der Masche entgegengesetzt gerichtet, so dass in der Wirkung sich beide Spannungen aufheben und sich kein Strom einstellt.

Von was ist nun die Austrittsarbeit der Elektronen außer vom Material noch abhängig? Antwort: Durch Wärme erhöht sich u.a. die thermische Energie der Elektronen. Somit können an einer wärmeren Kontaktstelle mehr Elektronen das Material verlassen als an einer kälteren. Die Anzahl der Elektronen und damit die Raumladung erhöht sich sowohl im Material A als auch im Material B. Resultierend aber erhöht sich die Kontakt-Spannung mit der Temperatur.

Die erhöhte Spannung in Bild EG5321C an der wärmeren Stelle bewirkt nun einen Stromfluss. Strom mal Spannung ergibt eine elektrische Leistung. Woher wird diese zur Verfügung gestellt? Antwort: Die thermische Energie wird in elektrische Energie umgewandelt.



$$U_{k1} > U_{k2}$$

Bild EG5321C

**Anwendung: Temperaturmessung mit Thermoelement**

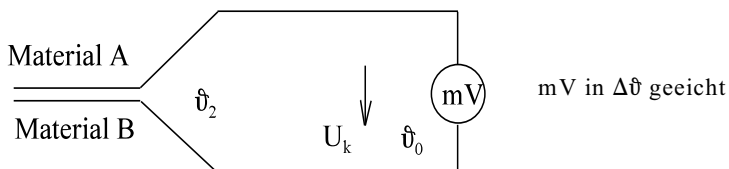


Bild EG5321D

$$U = f[\text{Material}, (\vartheta_2 - \vartheta_0)]$$

$$U_{th} = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \cdot \Delta T = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \Delta \vartheta = (\epsilon_2 - \epsilon_1) (\vartheta_2 - \vartheta_0)$$

$\epsilon$  - elektrothermisches Äquivalent

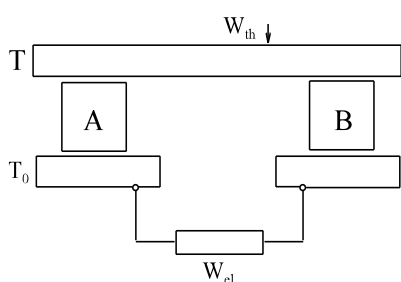
$\epsilon$  - materialabhängig => Elektrothermische Spannungsreihe

Material		$\epsilon$ in $\mu\text{V/K}$
Antimon	Sb	35
Eisen	Fe	16
Zink	Zn	3
Kupfer	Cu	2.8
Silber	Ag	2.7
Blei	Pb	0
Aluminium	Al	-0.5
Platin	Pt	-3.1
Nickel	Ni	-19
Wismut	Bi	-70
Silizium	Si	450
Konstantan		-37

**Angewandte Thermoelemente:**

- Cu - Konstantan 40  $\mu\text{V/K}$  bis 400°C
- NiCr - Konstantan 50  $\mu\text{V/K}$  bis 700°C
- Pt - PtRh 8  $\mu\text{V/K}$  bis 1600°C

**Theoretischer Thermogenerator**



$\eta < 10\%$   
Die Energie ist klein, weil U klein ist.  
Material A, Material B

Bild EG5321E

**Beispiel:**

Ein Thermoelement aus Kupfer und Platin soll eine Temperatur von 800°C messen. Wie groß ist die zu erwartende Spannung.

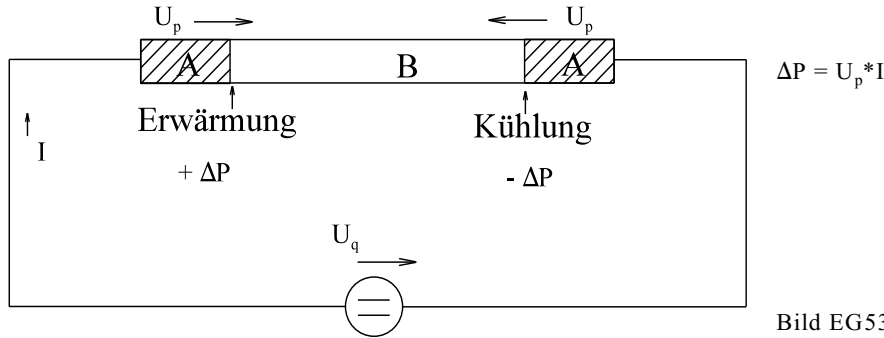
**Lösungsweg:**

**gegeben:** Thermoelement Cu -Pt  
 $\vartheta = 800^\circ\text{C}$

**gesucht:**  $U_{Th}$   
 $U_{Th} = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \cdot \Delta T$        $\epsilon_{Cu} = 2.8 \mu\text{V/K}$        $\epsilon_{Pt} = -3.1 \mu\text{V/V}$

$$U_{TH} = [2.8 - (-3.1)] \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot (800 - 20) \text{K} = 4.60 \text{mV}$$

5.3.2.2. Peltier-Effekt



$U_p$  - Peltierspannung

$$U_p \approx 10^{-2} \dots 10^{-3} \text{ V}$$

Spannung  $U_p$  ergibt sich wie beim Thermoelement aus der unterschiedlichen Austrittsarbeit der Elektronen. In Bild EG5322A ist der Strom einmal in Richtung  $U_p$  gerichtet: Dieses ergibt eine Erwärmung. Ist der Strom entgegengesetzt zu  $U_p$  gerichtet, ergibt sich eine Kühlung.

$$U_p = (\epsilon_2 - \epsilon_1)T$$

$\epsilon$  - Wert der elektrothermische Spannungsreihen  
 T - Kelvin-Temperatur (absolute Temperatur)

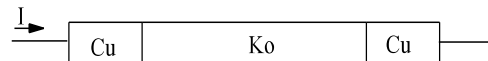
**Beispiel:**

Ein theoretisches Peltier-Element aus Cu-Konstantan-Cu mit einer Länge von  $l_{Cu} = 1 \text{ cm}$ ,  $l_{Ko} = 10 \text{ cm}$ ,  $l_{Cu} = 1 \text{ cm}$  und einer Fläche von  $A = 1 \text{ cm}^2$  wird von einem Strom von  $I = 10 \text{ A}$  bei  $T = 293 \text{ K}$  durchflossen.

- a) Welche Verlustleistungen treten in den einzelnen Abschnitten auf.
- b) Welche Leistungen treten in den Trennflächen auf.
- c) Wie groß ist die Gesamtspannung.

**Lösungsweg:**

**gegeben:** Peltier-Element Cu-Konstantan-Cu  
 $l_{Cu} = 1 \text{ cm}$      $l_{Ko} = 10 \text{ cm}$ ,     $l_{Cu} = 1 \text{ cm}$   
 $A = 1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$   
 $I = 10 \text{ A}$  bei  $T = 293 \text{ K}$



a)

$$R_{Cu} = \frac{l_{Cu}}{\kappa * A} = \frac{0.01m}{56 \frac{m}{\Omega mm^2} * 100mm^2} = 1.786 \mu\Omega$$

$$R_{Ko} = \frac{l_{Ko}}{\kappa * A} = \frac{0.1m}{2.3 \frac{m}{\Omega mm^2} * 100mm^2} = 0.4348 m\Omega$$

$$P_{Cu} = 2 * I^2 * R_{Cu} = 2 * (10 \text{ A})^2 * 1.786 * 10^{-6} \Omega = 2 * 0.179 \text{ mW}$$

$$P_{Ko} = I^2 * R_{Ko} = (10 \text{ A})^2 * 0.4348 * 10^{-3} \Omega = 43.5 \text{ mW}$$

b)

$$P_{T1} = -P_{T2}$$

$$P_T = U_p * I$$

$$U_p = (\epsilon_{Cu} - \epsilon_{Ko}) * T = [2.8 - (-37)] \frac{\mu V}{K} * 293 K = 11.66 mV$$

$$P_T = 11.66 mV * 10 A = 117 mW$$

$$P_{T1} = 117 mW \quad P_{T2} = -117 mW$$

c)

$$U = I * (2 * R_{Cu} + R_{Ko}) = 10 \text{ A} * (2 * 1.786 \mu\Omega + 0.4348 m\Omega) = 4.38 mV$$

### 5.3.3. Fragen und Fragen zu Abschnitt 5.3

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.5.3.A</b>	Bei metallischen Leitern stehen bei Raumtemperatur * schon alle Ladungsträger zum Stromtransport zur Verfügung * etwa 4 % der Ladungsträger zum Stromtransport zur Verfügung * etwa 60 % der Ladungsträger zum Stromtransport zur Verfügung * weniger als $10^{-4}$ der Ladungsträger zum Stromtransport zur Verfügung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.B</b>	Bei Halbleitern stehen bei Raumtemperatur * schon alle Ladungsträger zum Stromtransport zur Verfügung * etwa 4 % der Ladungsträger zum Stromtransport zur Verfügung * etwa 60 % der Ladungsträger zum Stromtransport zur Verfügung * weniger als $10^{-4}$ der Ladungsträger zum Stromtransport zur Verfügung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.C</b>	Der Grund für die Zunahme der Ladungsträger im Halbleiter mit der Temperatur ist: * mehr Elektronen haben höherer Energie * Elektronen verlassen aufgrund von Abstoßung das Atom * die Anzahl der Elektronen (auch der gebunden) wird größer	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.D</b>	Supraleitung tritt auf bei: * Leitern * Halbleitern * Isolatoren	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.E</b>	Supraleitung bedeutet: * Widerstand $R = 0$ * Leitwert $G = 0$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.F</b>	Heißleiter sind NTCc Heißleiter sind PTCs Kaltleiter sind NTCc Kaltleiter sind PTCc	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.G</b>	PTC heißt: * <u>p</u> ositiver <u>T</u> ransistor <u>C</u> ollector * <u>p</u> ositiver <u>T</u> emperature <u>C</u> oeffizient	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.H</b>	Positive Temperatur-Koeffizienten weisen auf: * Kohleschichtwiderstände * Drahtwiderstände * Halbleiterwiderstände * PTCs * NTCs	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.I</b>	Bei der Temperatur-Kompensation müssen die Temperaturbeiwerte * beide positiv sein * beide negativ sein * einer positiv und einer negativ sein	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.J</b>	Die Temperaturkompensationen * ist im gesamten Temperaturbereich gültig * ist beschränkt auf einen eingeschränkten Temperaturbereich * kann in gewissen Temperaturbereichen ein schlechteres Ergebnis ergeben	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.K</b>	Das Thermoelement basiert auf * dem Seebeck-Effekt * dem Peltier- Effekt * der unterschiedlichen Austrittsarbeit aus Metallen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.L</b>	Beim Thermoelement treten auf: * $\mu\text{V/K}$ * $\text{mV/K}$ * $\text{V/K}$ * $\text{kV/K}$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.M</b>	Beim Thermoelement betragen die Leistungen im Bereich * $\mu\text{W}$ * $\text{mW}$ * $\text{W}$ * $\text{kW}$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
<b>AF.5.3.N</b>	Der Peltier-Effekt basiert auf: * vom Betrag unterschiedlichen Spannungen an der Trennstelle ohne Strom * vom Betrag gleichen Spannungen an der Trennstelle ohne Strom * vom Betrag unterschiedlichen Spannungen an der Trennstelle mit Strom * vom Betrag gleichen Spannungen an der Trennstelle mit Strom * vom Vorzeichen unterschiedlichen Spannungen an der Trennstelle mit Strom * vom Vorzeichen gleichen Spannungen an der Trennstelle mit Strom * vom Vorzeichen unterschiedlichen Spannungen an der Trennstelle ohne Strom * vom Vorzeichen gleichen Spannungen an der Trennstelle ohne Strom	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.O</b>	Beim Peltier-Element * werden beide Trennstellen gekühlt * werden beide Trennstellen erwärmt * wird eine Trennstelle gekühlt und die andere erwärmt	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.Q</b>	Das Peltier-Element wird betrieben mit	* Wechselstrom * Gleichstrom	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.R</b>	Bei Umkehr der Stromrichtung beim Peltier-Element * bleibt die Stelle von Kühlung und Erwärmung erhalten * wird die Stelle von Kühlung und Erwärmung vertauscht	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>AF.5.3.S</b>	Um beim Peltier-Element eine spürbare Wirkung zu erzielen, wird eine * kleine Trennfläche benötigt * große Trennfläche benötigt	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

**Aufgabe 5.3.A**

Der Widerstand einer Cu-Spule von  $R_{20} = 950 \Omega$  soll mit einem NTC in Reihe bei  $\vartheta = 60^\circ\text{C}$  kompensiert werden. Zur Verfügung stehen NTCs mit den Kennlinien

$$R = R_{20} \cdot e^{\alpha_{20\text{NTC}} \cdot (\vartheta - 20^\circ\text{C})}$$

Der Wert  $\alpha_{20\text{NTC}} = -0.04 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  ist vorgegeben. Bestimmen Sie den Widerstandswert  $R_{20\text{NTC}}$  damit die Temperaturkompensation bei  $\vartheta = 80^\circ\text{C}$  optimal ist.

**Aufgabe 5.3.B**

Ein Thermoelement aus Kupfer und Aluminium soll eine Temperatur von  $500^\circ\text{C}$  messen. Wie groß ist die zu erwartende Spannung.

**Aufgabe 5.3.C**

Ein theoretisches Peltier-Element aus Al-Konstantan-Al mit einer Länge von  $l_{\text{Al}} = 0.4 \text{ cm}$ ,  $l_{\text{Ko}} = 8 \text{ cm}$ ,  $l_{\text{Al}} = 0.4 \text{ cm}$  und einer Fläche von  $A = 2 \text{ cm}^2$  wird von einem Strom von  $I = 10 \text{ A}$  bei  $T = 293 \text{ K}$  durchflossen.

- Welche Verlustleistungen treten in den einzelnen Abschnitten auf.
- Welche Leistungen treten in den Trennflächen auf.
- Wie groß ist die Gesamtspannung.



## 5.4. Elektrochemische Vorgänge

### 5.4.1. Elektrolyt

Elektrolyt: elektrisch leitende Flüssigkeit

Was ist Wasser, ein guter oder ein schlechter Leiter? Reines Wasser ist ein schlechter Leiter. Leitungswasser ist besser elektrisch leitfähig, weil es Zusätze (Salze) enthält.

Es gibt drei Arten von Zusätzen, die Wasser elektrisch leitfähig machen:

- Säuren
- Salze
- Lauge

Allen gemeinsam ist, dass sich alle drei Zusätze im Wasser lösen. Die Moleküle werden aufgetrennt und stehen als positive und negative Ladungsträger zur Verfügung, die den Strom leiten können.

positive Ladungsträger: Kationen  
negative Ladungsträger: Anionen

**Beispiel: Säure**

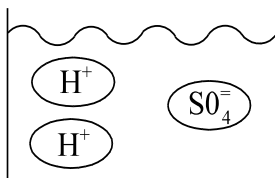


Bild EG541A:  $\text{H}_2\text{SO}_4$  - Schwefelsäure

Säure =  $\text{H}^+$ -Ion + Säurerest

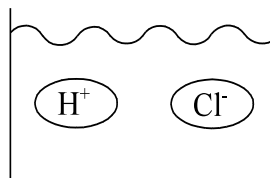


Bild EG541B:  $\text{HCl}$  - Salzsäure

**Beispiel: Salz**

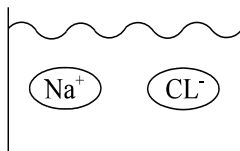


Bild EG541D:  $\text{NaCl}$  Natriumchlorid (Kochsalz)

Salz = Metall + Säurerest

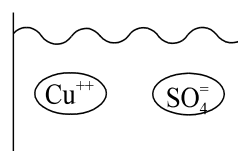


Bild EG541E:  $\text{CuSO}_4$  Kupfersulfat

**Beispiel: Base, Lauge**

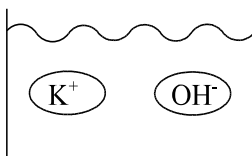


Bild EG541C

Lauge = Base +  $\text{H}_2\text{O}$

$\text{KOH}$  - Kaliumhydroxyd

**Stromleitung:**

Bei Anlegen einer Feldstärke wandern die positiven Ladungsträger in Richtung der Feldstärke, die negativen entgegengesetzt zur Feldstärke.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

## 5.4.2. Elektrolyse und Stromleitung

Stromleitung im Elektrolyten unter Einschluss der Vorgänge an den Elektroden

**Beispiel: Säure  $H_2SO_4$**

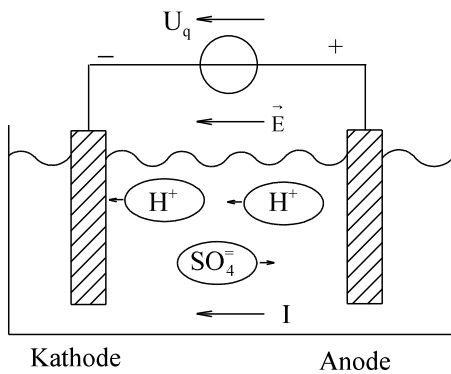


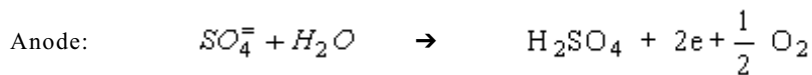
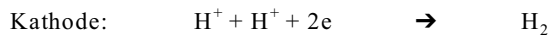
Bild EG542A

positive Teilchen  $H^+$

Kationen wandern zur Kathode

negative Teilchen  $SO_4^-$

Anionen wandern zur Anode



**Elektrolyse:** Unter Einfluss des elektrischen Stromes werden Stoffe zu den Elektroden transportiert. Dort entstehen abhängig vom Elektrolyten und vom Material der Elektroden elektrochemische Reaktionen.

**Beispiel: Salz  $Cu SO_4$  (Kupfersulfat)**

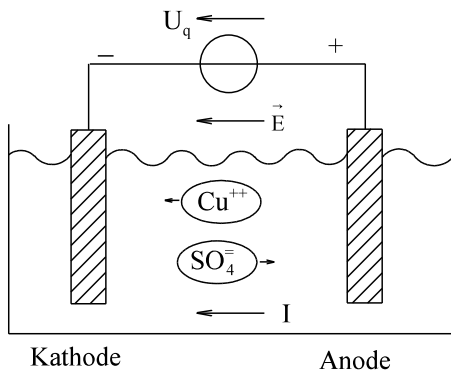
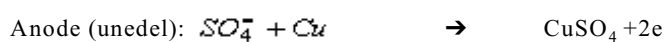
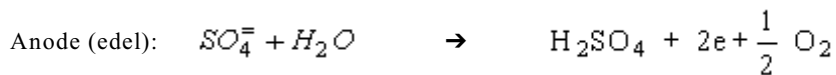
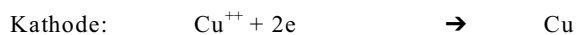


Bild EG542B



**Anwendung:**

- galvanisieren, Metallüberzug
- Herstellung reiner Stoffe (Metalle)
- $H_2$  und  $O_2$  Gewinnung

**Faraday'sche Gesetze**

Das **erste Gesetz von Faraday** sagt aus, dass die bei der Elektrolyse transportierte Masse proportional der durch den Elektrolyten geflossenen Ladung ist:

transportierte Masse  $\sim$  Ladung  
 $m \sim Q$

$m = c \cdot I \cdot t$	1. Faraday'sches Gesetz
-------------------------	-------------------------

Die Proportionalitätskonstante  $c$  ist eine Eigenschaft der Materialien und wird "elektrochemisches Äquivalent" genannt.

Früher lautete die Definition des Amperes: 1 Ampere ist die Stromstärke die aus einer Silbernitrat-Lösung in 1 s 1.118 mg Silber ausscheidet.

c - Werte in mg/As			
ALu	0.094	Cu	0.33
Gold	0.68	Ag	1.12

Das **zweite Gesetz von Faraday** beschäftigt sich mit der Bestimmung des elektrochemischen Äquivalents. Ein Atom (oder Molekül) transportiert  $z$  Valenzelektronen.

$z$  - Zahl der Valenzelektronen  
 $A_T$  - Atomgewicht (Molekulgewicht) in u  
 $u = 1.66 \cdot 10^{-24}$  g - atomare Masseneinheit

Die transportierte Ladung eines Atoms (oder Moleküls) ergibt sich aus Elementarladung  $q$  und Zahl der Valenzelektronen  $z$ :

$$Q = z \cdot q$$

Die transportierte Masse eines Atoms (oder Moleküls) lässt sich aus Atomgewicht (Molekulgewicht)  $A_T$  und atomarer Masseneinheit  $u$  berechnen:

$$m = A_T \cdot u$$

Einsetzen der oberen beiden Formeln in die Gleichung des ersten Faraday'schen Gesetzes ( $m = c \cdot Q$ ) ergibt:

$$(A_T \cdot u) = c \cdot (z \cdot q)$$

$$c = \frac{A_T \cdot u}{z \cdot q}$$

$$c = \frac{A_T \cdot 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}}{z \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}$$

$c = \frac{A_T}{z} \cdot 1.04 \cdot 10^{-5} \frac{\text{g}}{\text{As}}$	2. Faraday'sches Gesetz
---	-------------------------

**Beispiel 1:**

Wie viel Masse Silber wird aus einer Silbernitratlösung ( $\text{AgNO}_3$ ) bei einem Strom von  $I = 10$  A in 4 h ausgeschieden. Das Atomgewicht  $A_T = 108.9$  und die Ladungszahl  $z = 1$  von Silber ist gegeben.

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $\text{AgNO}_3$        $I = 10$  A       $t = 4$  h       $A_T = 108.9$        $z = 1$

**gesucht:**       $m$

$$c = \frac{A_T}{z} \cdot 1.04 \cdot 10^{-5} \frac{\text{g}}{\text{As}} = \frac{108.9}{1} \cdot 1.04 \cdot 10^{-5} \frac{\text{g}}{\text{As}} = 1.13 \frac{\text{mg}}{\text{As}}$$

$$m = c \cdot I \cdot t = 1.13 \frac{\text{mg}}{\text{As}} \cdot 10 \text{ A} \cdot 4 \cdot 3600 \text{ s} = 162.7 \text{ g}$$

**Beispiel 2:**

Welche Zeit  $t$  braucht man, um eine Metallplatte der Fläche  $A = 100 \text{ cm}^2$  bei einem Strom von  $I = 5 \text{ A}$  mit  $d = 100 \text{ }\mu\text{m}$  Kupfer ( $A_T = 63.5$ ,  $z = 2$ , Dichte  $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$ ) mit Hilfe der Elektrolyse aus einer Kupfersulfat-Lösung ( $\text{CuSO}_4$ ) zu überziehen.

**Lösungsweg:**

**gegeben:**  $A = 100 \text{ cm}^2 = 0.01 \text{ m}^2$   $I = 5 \text{ A}$   $d = 100 \text{ }\mu\text{m}$   
 $A_T = 63.5$   $z = 2$   $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$   
 $\text{CuSO}_4$

**gesucht:**  $t$

$$c = \frac{A_T}{z} * 1.04 * 10^{-5} \frac{\text{g}}{\text{As}} = \frac{63.5}{2} * 1.04 * 10^{-5} \frac{\text{g}}{\text{As}} = 0.3302 \frac{\text{mg}}{\text{As}}$$

$$m = V * \rho = A * d * \rho = c * I * t$$

$$t = \frac{A * d * \rho}{c * I} = \frac{0.01 \text{ m}^2 * 100 * 10^{-6} \text{ m} * 8900 * 10^3 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}}{0.3302 * 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{As}} * 5 \text{ A}} = 5391 \text{ s}$$

**5.4.3. Elektrochemische Spannungserzeugung**

Bislang wurde eine Spannung außen angelegt und die Wirkung des Stromes diskutiert (Elektrolyse). In diesem Abschnitt sollen die Spannungseffekte an den Elektroden untersucht werden. Dazu wird der Versuch 5.1 beschrieben. Das Potential im elektrolytischen Trog bei Stromfluss nach Bild EG543A wird bestimmt. Das Ergebnis ist in Bild EG543B dargestellt.

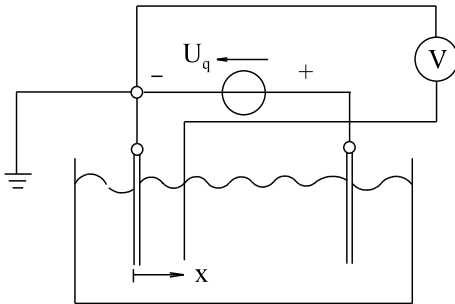
**Versuch 5.1:**

Bild EG543A: Versuch 5.1: Messung des Potentials im elektrolytischen Trog bei Gleichspannung

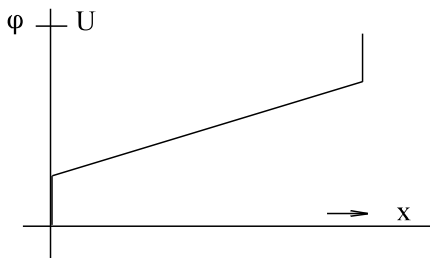


Bild EG543B: Ergebnis Versuch 5.1

**Fazit:** In der Mitte ist ein linearer Verlauf vorhanden. Dieser linearer Verlauf ist durch die Leitfähigkeit des Elektrolyten bedingt. An den Elektroden ist ein sprungförmiger Übergang vorhanden. Wie ist das zu erklären? Chemische Reaktionen und Polarisierungen sind die Ursache.

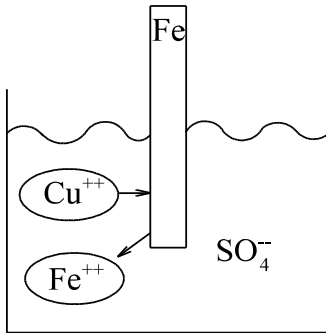
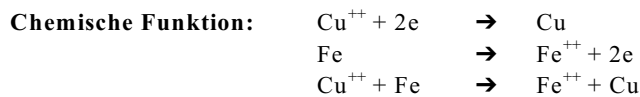
**Versuch 5.2**

Bild EG543C: Versuch 5.2, Versuchsanordnung

**Versuchsdurchführung:** Kupfersulfat ( $\text{CuSO}_4$ ) wird in Wasser gelöst. Anschließend wird reines Eisenblech in die Kupfersulfatlösung getaucht.

**V Versuchsergebnis:** Kupfer schlägt sich auf das Eisenblech ab.

**Physikalische Erklärung:** Die positiven  $\text{Cu}^{++}$ -Ionen setzen sich auf dem Eisenblech als Cu ab. Woher kommen die zwei Elektronen pro Atom? Diese können nur aus dem Eisen stammen. Das Eisen geht als Kation  $\text{Fe}^{++}$  in die Lösung. Das Eisen (Fe) wird durch Kupfer (Cu) ersetzt.



Warum wird Eisen (Fe) durch Kupfer (Cu) ersetzt? Funktioniert der Vorgang auch umgekehrt, dazu wird der Versuch 5.3 beschrieben.

**Versuch 5.3**

**Versuchsdurchführung:** Platten aus verschiedenen Materialien werden in verschiedene Salzlösungen gehalten.

**V Versuchsergebnis:**

Salz Material		Silber (Ag)	Kupfer (Cu)	Eisen (Fe)	Zink (Zn)
Silbernitrat	$\text{AgNO}_3$	-	Ag-Schicht	Ag-Schicht	Ag-Schicht
Kupfersulfat	$\text{CuSO}_4$	-	-	Cu-Schicht	Cu-Schicht
Eisensulfat	$\text{FeSO}_4$	-	-	-	Fe-Schicht
Zinksulfat	$\text{ZnSO}_4$	-	-	-	-

**Kommentar:** Es gibt eine gewisse Reihenfolge, manches wird ersetzt, manches nicht. Prinzip: Das edlere Metall setzt sich ab, das unedlere Metall geht in Lösung. **Das unedlere Metall hat die Tendenz eher in die Lösung zu gehen als das edlere Metall.**

Wie ist die chemische Spannungserzeugung zu erklären? Dazu soll der Versuch 5.4 beschrieben werden.

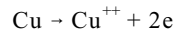
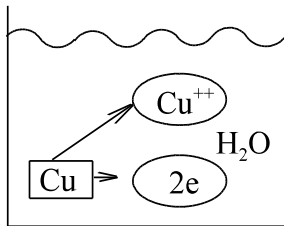
**Versuch 5.4**

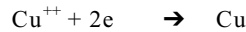
Bild EG543D: Versuchsanordnung 5.4

**Versuchsdurchführung:**

Kupfer (Cu) wird in Wasser gelegt. Es löst sich langsam auf.

**Versuchsergebnis:**

Kupfer (Cu) löst sich langsam auf.

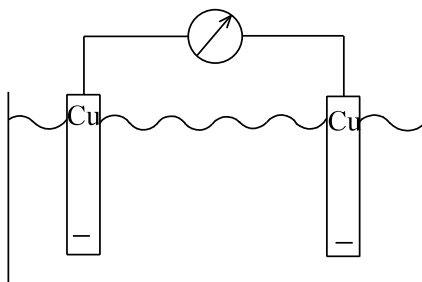
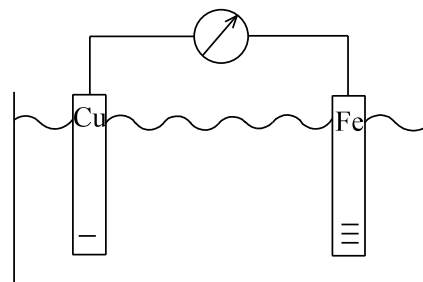
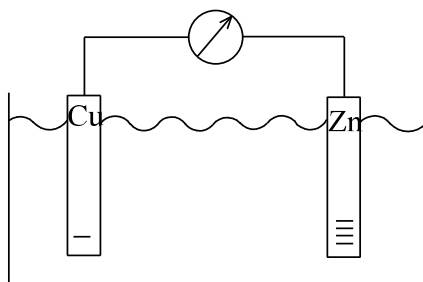
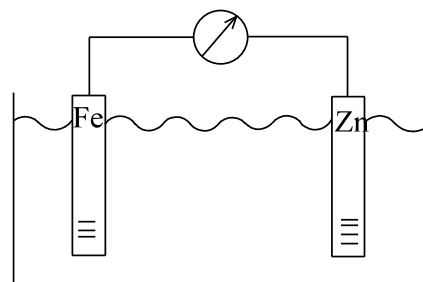
**Chemische Funktion:****Fazit:**

Jedes Metall hat mehr oder weniger die Tendenz in Lösung zu gehen. Bei edlen Metallen ist die Tendenz gering, bei unedlen eher größer.

Zwei Fragen ergeben sich: Welches Metall ist edel und welches unedel. Bei Abgabe von Elektronen entstehen Raumladungen. Bedingen diese Raumladungen eine Spannung? Dazu wird der Versuch 5.5 beschrieben.

**Versuch 5.5****Versuchsdurchführung:**

Platten aus Kupfer (Cu), Eisen (Fe) und Zink (Zn) werden in einem Elektrolyten getaucht und die Spannung gemessen.

**Versuchsanordnung:**Bild EG543E:  $U = 0 \text{ V}$ Bild EG543F:  $U = 0.75 \text{ V}$ Bild EG543FG:  $U = 1.10 \text{ V}$ Bild EG543H:  $U = 0.35 \text{ V}$ **Physikalische Erklärung:**

Jedes Metall hat unterschiedliche Neigung sich in Wasser aufzulösen. Wird ein Atom gelöst, werden die Valenzelektronen an die Metallelektrode abgegeben. Das Metall geht als Kation in Lösung. Die an die Metallelektrode abgegebenen Elektronen sind in den Bildern EG534E bis EG543H symbolisch mit "-" angedeutet. Dabei ist die unterschiedliche Lösbarkeit der Metalle durch die Anzahl der "-" Zeichen angedeutet. Unterschiedliche Elektronenkonzentrationen ergeben eine elektrische Spannung. Die Höhe der Spannung ergibt sich aus der Differenz der Anzahl der Elektronenabgabe. Es wird folgende Reihenfolge festgestellt:

edel	Cu	Fe	Zn	unedel
	1	3	4	
	-	---	----	

**Elektrochemische Spannungsreihe**

Material	Wertigkeit		$U_{\text{ch}}/\text{V}$
Lithium	1	Li	-3.04
Natrium	1	Na	-2.71
Aluminium	3	Al	-1.66
Zink	2	Zn	-0.76
Eisen	2	Fe	-0.45
Blei	2	Pb	-0.13
Eisen	3	Fe	-0.04
Wasserstoff		$\text{H}_2$	0
Kupfer	2	Cu	0.34
Kupfer	1	Cu	0.52
Kohle			0.74
Quecksilber	2	Hg	0.80
Silber	1	Ag	0.80
Platin	2	Pt	1.18
Gold	3	Au	1.40
Gold	1	Au	1.69

$$U = U_{\text{ch2}} - U_{\text{ch1}}$$

Die Spannung eines chemischen Elementes ergibt sich aus der Differenz der Spannungswerte der elektrochemischen Spannungsreihe.

Problem: Beim einfachen chemischen Element tritt die obere theoretische Spannung nur am Anfang auf. Dazu wird der Versuch 5.6 beschrieben.

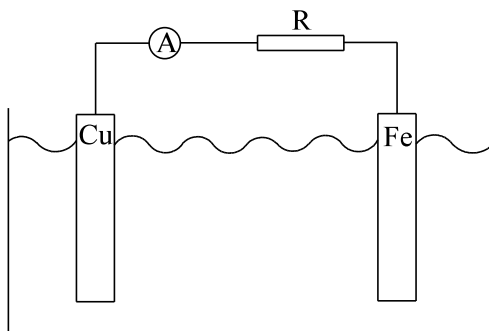
**Versuch 5.6****Versuchsordnung:**

Bild EG543I

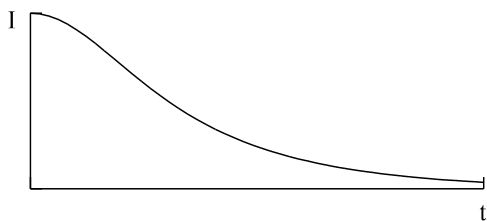
**Versuchsergebnis:**

Bild EG543J

**Physikalische Ergebnis:**

Abnahme des Stroms ist bedingt durch Effekte an den Elektroden und wird Polarisation genannt. Durch Elektrolyse bilden sich Gase:

1. Gase sind Nichtleiter
2. Gase befinden sich an anderen Stellen der elektrochemischen Spannungsreihe.

Der obere Effekt muss bei galvanischen Elementen (Batterien) unterbunden werden.

**Beispiel:**

Welche Spannung stellt sich an den Elektroden im Elektrolyten ein, bei folgenden Material-Kombinationen:

- a) Kohle - Zink                      b) Blei - Kupfer                      c) Alu - Kupfer

**Lösungsweg:**

- a) Kohle - Zink                       $0.74 \text{ V} - (-0.76 \text{ V}) = 1.5 \text{ V}$   
 b) Blei - Kupfer                       $0.34 \text{ V} - (-0.13 \text{ V}) = 0.47 \text{ V}$   
 c) Alu - Kupfer                       $0.34 \text{ V} - (-1.66 \text{ V}) = 2.00 \text{ V}$

### 5.4.3.1. Galvanische Elemente

Auch: Batterie oder Primärzelle genannt. Nur ein Entladen der Batterie ist möglich. Aufladen ist unmöglich.

#### Kohle-Zink-Element

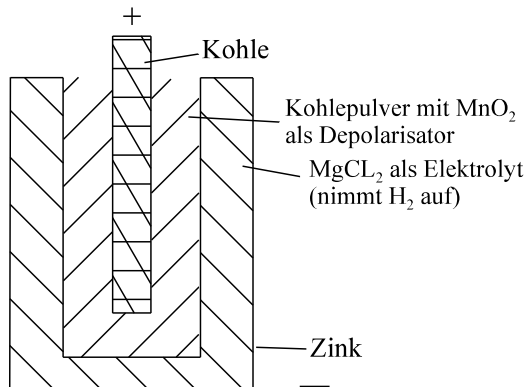


Bild EG5431a

$R_i = f(t)$      $\vartheta < 0$  schlecht  
 $U = 1.5 \text{ V}$      $\vartheta < -20 \text{ }^\circ\text{C}$  überhaupt kein Effekt  
 $100 \text{ mWh/cm}^3 \dots 200 \text{ mWh/cm}^3$

#### Alkali-Mangan-Zelle

$U = 1.5 \text{ V}$                        $300 \text{ mWh/cm}^3$  bis  $-40 \text{ }^\circ\text{C}$

#### Quecksilberoxid-Zelle

$U = 1.35 \text{ V}$                       (Knopfzelle)  
 $500 \text{ mWh/cm}^3$                        $-20 \text{ }^\circ\text{C} \dots 100 \text{ }^\circ\text{C}$

#### Silberoxid-Zelle

$300 \text{ mWh/cm}^3$

#### Lithium-Zelle

$U = 1.5 \dots 3 \text{ V}$                        $1500 \text{ mWh/cm}^3$ , bis  $-55 \text{ }^\circ\text{C}$ , sehr teuer

Die einzelnen Zellen weisen unterschiedliche Entladekurven auf:  $U = f(t)$



## 5.4.3.2. Akkumulator

zwei Richtungen: Laden und Entladen  
auch Sammler und Sekundärzelle genannt

**Bleiakku** (Autobatterie)  
**Prinzip:** Bleiplatte in Schwefelsäure

**A) Laden:**

Wird Blei (Pb) in Schwefelsäure getaucht, so bildet sich Bleisulfat (PbSO<sub>4</sub>). Platten aus Blei mit Bleisulfat (PbSO<sub>4</sub>)-Überzug bilden die Elektroden beim Laden

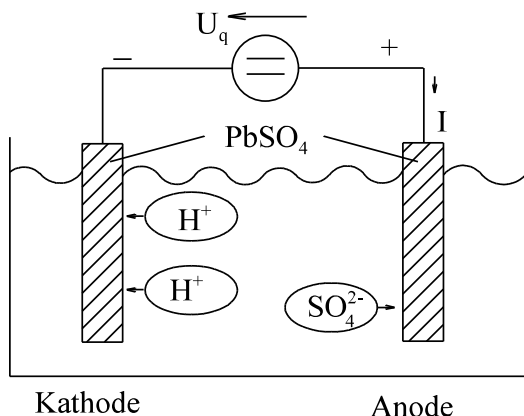
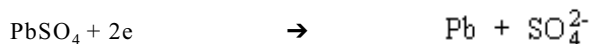
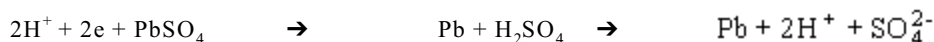


Bild EG5432A: Laden des Bleiakkus

**Kathode:****Erklärung:**

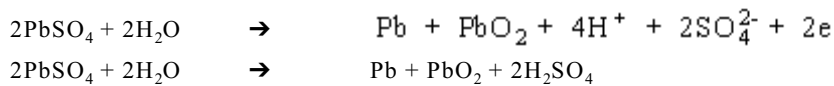
Die  $\text{H}_2^+$ -Kationen wandern bei Anlegen einer Spannung zur Kathode. Die Kathode gibt zwei Elektronen ab. Es entsteht Blei (Pb) und Schwefelsäure (H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>). Die Schwefelsäure wird wieder im Wasser gelöst, so daß in der Bilanzgleichung die zwei H<sup>+</sup>-Ionen gekürzt werden können.

**Anode:****Erklärung:**

Die  $\text{SO}_4^{2-}$ -Ionen wandern zur Anode. An der Anode entsteht Bleioxid (PbO<sub>2</sub>). Das Blei (Pb) kann nur aus dem Bleisulfat (PbSO<sub>4</sub>) stammen, so dass zwei SO<sub>4</sub> über sind. Diese verbinden sich zu zwei Schwefelsäure (H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>). In der Bilanz fehlen noch 2e, die das  $\text{SO}_4^{2-}$  abgibt. Die fehlenden 4H werden aus dem Wasser genommen. Die O-Bilanz stimmt somit auch. Schwefelsäure (H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) löst sich wieder in Wasser. Somit kann in der Bilanzgleichung ein  $\text{SO}_4^{2-}$  auf der linken Seite gekürzt werden.

**Gesamtbilanz beim Laden:**

Die beiden Bilanz-Gleichungen von Anode und Kathode werden addiert und zusammengefaßt:



**Fazit:** Beim Laden des Blei-Akkus wird Bleisulfat ( $\text{PbSO}_4$ ) in Blei ( $\text{Pb}$ ) und Bleioxid ( $\text{PbO}_2$ ) umgewandelt. Bleioxid ( $\text{PbO}_2$ ) ist edler als Blei ( $\text{Pb}$ ) und damit die positive Elektrode. Außerdem verringert sich der Wasser ( $\text{H}_2\text{O}$ ) Anteil und der Anteil der Schwefelsäure steigt.

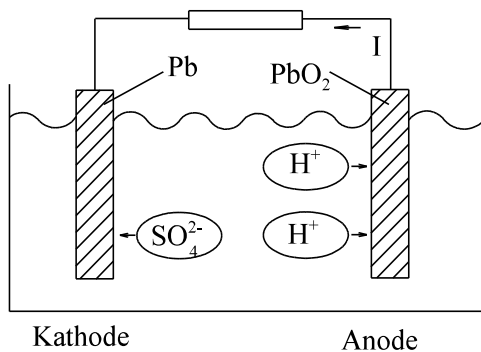
**B) Entladen**

Bild EG5432B

**Frage:** In welche Richtung bewegen sich die Ionen im Bad bei Anschließen eines Widerstandes. Zwei Begründungen sind möglich.

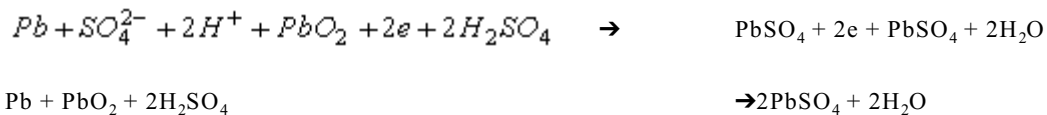
1. Der negative Pol der Spannungsquelle ist der unedlere Pol und der Pluspol ist der edlere Pol. Der Strom fließt also außerhalb der Quelle (Bades) vom Bleioxid ( $\text{PbO}_2$ ) zum Blei ( $\text{Pb}$ ).
2. Das Vorzeichen der Spannung bleibt beim Laden und beim Entladen gleich. Laden und Entladen haben verschiedene Energie-Richtungen. Da die Spannung gleich bleibt, kann die Energie nur durch den Strom umgekehrt werden. Die Richtung des Stromes ist somit beim Laden und Entladen unterschiedlich.

Da die Stromrichtung die Richtung der positiven Ladungsträger ist, kann die Ionenbewegung in Bild EG5432B eingezeichnet werden.

**Kathode:****Anode:**

**Gesamtbilanz Entladen**

Die beiden Bilanz-Gleichungen von Anode und Katode werden addiert und zusammengefasst:



**Fazit:** Beim Entladen des Akkus wird Blei (Pb) und Bleioxid (PbO<sub>2</sub>) in Beilsulfat (PbSO<sub>4</sub>) umgewandelt. Außerdem wird Schwefelsäure (H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) in Wasser (H<sub>2</sub>O) umgewandelt. Die Säuredichte sinkt.

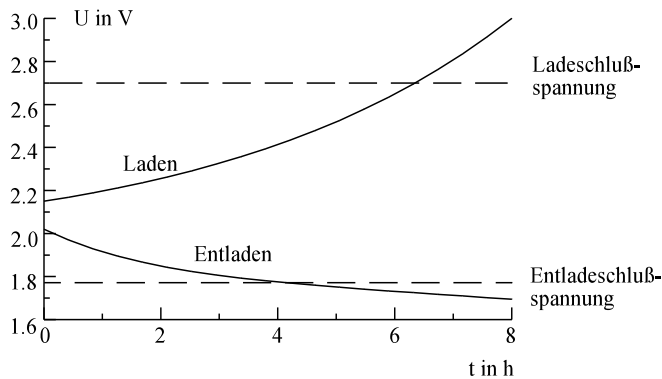


Bild EG5432C

Die Kapazität ist bei langsamer Entladung größer. Die Akkus nie entladen stehen lassen.

**Laden:** An der Katode entstehen geringe Mengen Wasserstoff (H<sub>2</sub>), gefährlich. Wasser nachfüllen.

**Daten Blei Akku**

Leerlaufspannung	2.1 V	
Nennspannung	2.0 V	
Entladeschlussspannung	1.75 V	
Ladeschlussspannung	2.6 .. 2.75 V	
Säuredicht geladen	1.28 kg/dm <sup>3</sup>	
Säuredicht entladen	1.184 kg/dm <sup>3</sup>	
Energiedichte	8 Wh/kg	
Wirkungsgrad	$\eta_{Wh} = 78 \%$	$\eta_{Ah} = 90 \%$

**Weitere Akkus****Stahlakku:**

Elektroden	Ni, Cd, Fe	
Elektrolyt	KOH	
Nennspannung	1.2 V	
Entladungsschlussspannung	1.0 V	
Ladungsschlussspannung	1.8 V	
Energiedichte	25 .. 35 Wh/kg	
Wirkungsgrad	$\eta_{Wh} = 50 \dots 60 \%$	$\eta_{Ah} = 70 \%$
Eigenschaften	Robust, Dichtekontant, Knopfzelle möglich, Kapselbar	

**5.4.4. Frage und Aufgaben zu Abschnitt 5.4**

**Frage 5.4.A** Eine Elektrolyt ist:

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :			richtig	falsch
<b>AF.5.4.A</b>	Ein Elektrolyt kann sein	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Säure in Wasser</li> <li>* Kupfer in Wasser</li> <li>* Lauge</li> <li>* Salz in Wasser</li> <li>* destilliertes Wasser</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.4.B</b>	Kationen sind:	<ul style="list-style-type: none"> <li>* positiv geladen</li> <li>* negativ geladen</li> <li>* wandern zur Anode</li> <li>* wandern zur Kathode</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.4.C</b>	Anionen sind:	<ul style="list-style-type: none"> <li>* positiv geladen</li> <li>* negativ geladen</li> <li>* wandern zur Anode</li> <li>* wandern zur Kathode</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>AF.5.4.D</b>	Eine Säure besteht aus:	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Wasserstoff plus Säurerest</li> <li>* Sauerstoff plus Säurerest</li> <li>* Metall plus Säurerest</li> <li>* Base in Wasser gelöst</li> <li>* Lauge in Wasser gelöst</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>F.5.4.E</b>	Eine Salz besteht aus:	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Wasserstoff plus Säurerest</li> <li>* Sauerstoff plus Säurerest</li> <li>* Metall plus Säurerest</li> <li>* Base in Wasser gelöst</li> <li>* Lauge in Wasser gelöst</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>F.5.4.F</b>	Eine Lauge besteht aus:	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Wasserstoff plus Säurerest</li> <li>* Sauerstoff plus Säurerest</li> <li>* Metall plus Säurerest</li> <li>* Base in Wasser gelöst</li> <li>* Lauge in Wasser gelöst</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>F.5.4.G</b>	Die elektrochemische Spannungsbildung basiert auf	<ul style="list-style-type: none"> <li>* unterschiedlichen Raumladungen durch Dotierung</li> <li>* unterschiedlicher Lösbarkeit von Leitern in Elektrolyten</li> <li>* unterschiedlicher Austrittarbeit von Elektronen</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>F.5.4.H</b>	Bei der elektrochemische Spannungsreihe geht am leichtesten in Lösung das Element	<ul style="list-style-type: none"> <li>* mit dem höchsten Wert</li> <li>* mit dem niedrigstem Wert</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>F.5.4.I</b>	Polarisation bedeutet bei galvanischen Zellen	<ul style="list-style-type: none"> <li>* chemische Reaktion an den Elektroden</li> <li>* Ladungsträgertrennung an den Elektroden</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>F.5.4.J</b>	Beim Bleiakku:	<ul style="list-style-type: none"> <li>* entsteht beim Laden Säure</li> <li>* entsteht beim Entladen Säure</li> <li>* entsteht beim Laden Wasser</li> <li>* entsteht beim Entladen Wasser</li> </ul>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Aufgabe 5.4.A**

Wie viel Masse Silber wird aus einer Silbernitratlösung ( $\text{AgNO}_3$ ) bei einem Strom von  $I = 15 \text{ A}$  in 3 h ausgeschieden. Das Atomgewicht  $A_T = 108.9$  und die Ladungszahl  $z = 1$  von Silber ist gegeben.

**Aufgabe 5.4.B**

Welche Zeit  $t$  braucht man, um eine Metallplatte der Fläche  $A = 5 \text{ cm}^2$  bei einem Strom von  $I = 7 \text{ A}$  mit  $d = 20 \mu\text{m}$  Kupfer ( $A_T = 63.5$ ,  $z = 2$ , Dichte  $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$ ) mit Hilfe der Elektrolyse aus einer Kupfersulfat-Lösung ( $\text{CuSO}_4$ ) zu überziehen.

**Aufgabe 5.4.C**

Welche Spannung stellt sich an den Elektroden im Elektrolyten ein, bei folgenden Material-Kombinationen:  
a) Aluminium - Blei      b) Aluminium - Platin